ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1

GRAZIANO CRASTA

1. SPAZI METRICI

Esercizio 1.1. ([2, Ex. 2.11]) Stabilire quali fra le seguenti funzioni sono metriche in $\mathbb{R}$.

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \qquad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|,$$
$$d_4(x,y) = |x-2y|, \qquad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,.$$

Esercizio 1.2. Sia X un insieme e siano d_1, d_2 metriche su X. Diremo che le metriche d_1e d_2 generano la stessa topologia se un insieme è aperto in (X, d_1) se e solo se è aperto in (X, d_2). Dimostrare che:

(a) le due metriche generano la stessa topologia se e solo se per ogni $x \in X$ qualsiasi intorno di x nella metrica d_1 contiene un intorno di x nella metrica d_2 e viceversa;
(b) se le due metriche generano la stessa topologia, allora i corrispondenti spazi metrici hanno le stesse successioni convergenti.

Esercizio 1.3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la funzione

$$\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\,, \qquad x, y \in X,$$

è una metrica in X. Dimostrare inoltre che d e $\tilde{d}$ generano la stessa topologia.

Esercizio 1.4. Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Dimostrare che la funzione

$$d(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

è una metrica su $\mathbb{R}$. Dimostrare inoltre che, se φ è continua (rispetto all'usuale metrica euclidea), allora la metrica d genera la stessa topologia della metrica euclidea.

Esercizio 1.5. Sia $\varphi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione *sub-additiva*, cioè tale che

$$\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s) \quad \forall t, s \geq 0.$$

Supponiamo inoltre che φ sia crescente e che

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(t) > 0 \quad \forall t > 0.$$

Dimostrare che, se (X, d) è uno spazio metrico, allora $\tilde{d}(x,y) := \varphi(d(x,y))$, $x, y \in X$, è una metrica in X.

Esercizio 1.6. Sia $\varphi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione concava tale che $\varphi(0) = 0$. Dimostrare che φ è sub-additiva. Concludere che le funzioni

$$\varphi_1(t) := \arctan t, \quad \varphi_2(t) := \frac{t}{1+t}, \qquad t \geq 0,$$

soddisfano le ipotesi elencate nell'Esercizio 1.5.

Date: 9 maggio 2015.

Esercizio 1.7. Sia $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e sia $\varphi \colon \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\varphi(x) := \begin{cases} \arctan x, & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ \pi/2, & \text{se } x = +\infty, \\ -\pi/2, & \text{se } x = -\infty. \end{cases}$$

Dimostrare che la funzione

$$d(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|, \qquad x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

è una metrica in $\overline{\mathbb{R}}$. Come sono fatti gli intorni dei punti $\pm\infty$?

Esercizio 1.8. Consideriamo lo spazio $X := C^0([a,b])$. Fissata una costante $L > 0$, si definisca la funzione $d_* \colon X \times X \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$d_*(f,g) := \max_{x \in [a,b]} e^{-2L(x-a)} |f(x) - g(x)|, \qquad \forall f, g \in X.$$

Dimostrare che d_* è una metrica su X equivalente alla metrica d_∞.

Esercizio 1.9. Sia $\Phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione L-Lipschitziana, soddisfacente cioè la condizione

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L\, |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(La costante $L > 0$ è anche detta *costante di Lipschitz* della funzione Φ.)
Sia $X = C^0([a,b])$, munito della metrica d_* definita nell'Esercizio 1.8. Consideriamo l'applicazione $T \colon X \to X$, $f \mapsto T[f]$, definita da

$$T[f](x) := \int_a^x \Phi(f(s))\, ds, \qquad f \in X,\ x \in [a,b].$$

Dimostrare che

$$d_*(T[f], T[g]) \leq \frac{1}{2}\, d_*(f,g) \qquad \forall f, g \in X,$$

vale a dire, T è un'applicazione (1/2)-Lipschitziana da X in X rispetto alla metrica d_*.

2. TOPOLOGIA

Esercizio 2.1. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Dimostrare che

(a) se $x \in E$, allora $x \in \operatorname{int} E$ oppure $x \in \partial E$;
(b) se $x \in E$, allora $x \in E'$ oppure x è isolato;
(c) se $x \in \partial E$, allora $x \in E'$ oppure x è isolato;
(d) se $x \in \operatorname{int} E$, allora $x \in E$;
(e) se x è isolato, allora $x \in E$;
(f) se $x \in E'$, allora $x \in \operatorname{int} E$ oppure $x \in \partial E$;
(g) se x è un punto isolato, allora $x \in \partial(E^C)$.

Esercizio 2.2. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Dimostrare che se $x \in E'$, allora ogni intorno di x contiene infiniti punti di E.

Esercizio 2.3. Sia (X,d) uno spazio metrico, sia $E \subseteq X$ e siano $x \in X$, $r > 0$. Dimostrare che se $B_r(x) \cap E = \emptyset$, allora $B_r(x) \cap E' = \emptyset$.

Esercizio 2.4. ([3, Ex. 8.1.12]) Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Dimostrare che

(a) ∂E è chiuso;
(b) $\operatorname{int} E$ è aperto;

(c) E è aperto se e solo se $E = \mathrm{int}E$;
(d) l'insieme dei punti esterni ad E è aperto;
(e) E' è chiuso.

Esercizio 2.5. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto. Quali sono gli insiemi aperti in X? E quelli chiusi?

Esercizio 2.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subset X$ un suo sottoinsieme finito. Dimostrare che E è chiuso.

Esercizio 2.7. ([3, Ex. 8.1.6]) Sia (X, d) uno spazio metrico.

(a) Siano dati $x \in X$ e $r > 0$. Posto $E := B_r(x)$, dimostrare che

$$\overline{E} \subseteq \{y \in X : \ d(y, x) \le r\}\,.$$

(b) Sia d la metrica discreta in X, sia $x \in X$ e sia $E := B_1(x)$ Dimostrare che, se X contiene più di un punto, allora

$$\overline{E} \neq \{y \in X : \ d(y, x) \le 1\}\,.$$

(c) Dimostrare che, se la metrica d è indotta da una norma $\|\cdot\|$ su X (vale a dire, se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato e $d(x, y) = \|x - y\|$ per ogni $x, y \in X$), allora in (a) vale l'uguaglianza fra i due insiemi, cioè

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in X : \ \|y - x\| \le r\}.$$

Esercizio 2.8. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Dimostrare che $\partial(\partial E) \subseteq \partial E$. Mostrare, con un esempio, che l'inclusione può essere stretta.

Esercizio 2.9. Sia (X, d) uno spazio metrico. Diremo che una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente (s.c.i.) in $x \in X$ se

$$f(x) \le \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$$

per ogni successione $(x_n)_n \subset X$ convergente a x. Dimostrare che f è s.c.i. in ogni punto $x \in X$ se e solo se, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello

$$C_\alpha := \{x \in X : \ f(x) \le \alpha\}$$

è chiuso in X.

3. COMPATTEZZA

Esercizio 3.1. Si dimostri che l'intervallo $(0, 1)$ non è compatto in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, esibendo una sua copertura aperta dalla quale non sia possibile estrarre una sottocopertura finita.

Esercizio 3.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che qualsiasi sottoinsieme finito di X è compatto.

Esercizio 3.3. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto (vale a dire, sia d la metrica discreta sull'insieme X). Dimostrare che, se $E \subset X$ è infinito, allora E non è compatto.

Esercizio 3.4. In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dimostrare, usando la definizione, che $\mathbb{Z}$ non è compatto.

Esercizio 3.5. In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ consideriamo l'insieme $K := \{0\} \cup \{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\}$. Dimostrare, usando la definizione, che K è compatto.

Esercizio 3.6 (Teorema di Convergenza Dominata)**.** Sia $(x^n)_n \subset \ell^p$, $1 \leq p < +\infty$, una successione convergente puntualmente a $x \in \ell^p$, cioè tale che

$$\lim_{n\to+\infty} x^n_j = x_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Supponiamo inoltre che esista $y \in \ell^p$ tale che

$$|x^n_j| \leq y_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Dimostrare che $\|x^n - x\|_p \to 0$ per $n \to +\infty$, cioè che $(x^n)_n$ converge a x in ℓ^p.

Esercizio 3.7. Si consideri lo spazio metrico (ℓ^2, d_2) delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \dots)$ tali che

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < +\infty\,.$$

Si dimostri che

(a) il cubo infinito

$$Q := \{x \in \ell^2 :\ |x_n| \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}^+\}$$

è chiuso ma non limitato (dunque non è compatto);

(b) la palla unitaria chiusa

$$B := \{x \in \ell^2 :\ \|x\|_2 \leq 1\}$$

è chiusa e limitata, ma non compatta;

(c) il *cubo di Hilbert*

$$H := \left\{x \in \ell^2 :\ |x_n| \leq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

è compatto.

Esercizio 3.8. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $K_1, \dots, K_n \subseteq X$ insiemi compatti. Dimostrare che $K := \bigcup_{j=1}^n K_n$ è compatto.

Esercizio 3.9. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano (x_n), (y_n) successioni in X convergenti rispettivamente a x e y. Dimostrare che la successione $(d(x_n, y_n))$ converge a $d(x, y)$.

Esercizio 3.10. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per ogni coppia di insiemi non vuoti $A, B \subseteq X$ definiamo la minima distanza fra A e B come

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) :\ a \in A,\ b \in B\}\,.$$

Dimostrare che, se A e B sono compatti, allora l'estremo inferiore è raggiunto, vale a dire esistono $\bar{a} \in A$ e $\bar{b} \in B$ tali che $\operatorname{dist}(A, B) = d(\bar{a}, \bar{b})$.

Esercizio 3.11. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un insieme compatto non vuoto. Dimostrare che esistono $\bar{x}, \bar{y} \in K$ tali che

$$\operatorname{diam} K = d(\bar{x}, \bar{y})\,.$$

Esercizio 3.12. Dimostrare che uno spazio metrico compatto (X, d) è *separabile*, vale a dire, esiste un sottoinsieme numerabile $E \subseteq X$ tale che $\overline{E} = X$.

Esercizio 3.13. Si consideri la funzione $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, & \text{se } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ sono proporzionali,} \\ \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea di $\mathbb{R}^2$.

(a) Si dimostri che d è una metrica in $\mathbb{R}^2$ (detta *metrica del riccio*).
(b) Posto $X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\mathbf{x}\| \le 1\}$, si dimostri che X è chiuso, limitato, ma non è compatto.

Esercizio 3.14. (Teorema di Weierstrass generalizzato) Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente (si veda l'Esercizio 2.9). Supponiamo inoltre che f sia *coercitiva*, cioè che

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

vale a dire

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists R > 0 \text{ tale che } f(x) \ge M\ \forall \|x\| \ge R.$$

Dimostrare che f ammette un punto di minimo assoluto in $\mathbb{R}^n$.

4. COMPLETEZZA

Esercizio 4.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n) \subset X$ una successione di Cauchy. Dimostrare che se (x_n) ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente a x allora tutta la successione converge a x.

Esercizio 4.2. Sia (X, d) uno spazio metrico *completo* e sia (E_n) una successione di insiemi chiusi, limitati, non vuoti, tali che $E_n \supset E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_n \operatorname{diam} E_n = 0$. Dimostrare che $\bigcap_n E_n$ consiste esattamente di un punto.

Esercizio 4.3. Siano (x_n) e (y_n) due successioni di Cauchy in uno spazio metrico (X, d). Dimostrare che la successione numerica $\delta_n := d(x_n, y_n)$ è convergente.

Esercizio 4.4. Dimostrare che $(C^0([a, b]), d_1)$ non è completo.

Esercizio 4.5. Si consideri la funzione $d(x, y) := |e^x - e^y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Si dimostri che

(a) d è una distanza su $\mathbb{R}$;
(b) $(\mathbb{R}, d)$ non è completo;
(c) d genera su $\mathbb{R}$ la stessa topologia della distanza euclidea.

Esercizio 4.6. Sia $\varphi(t) := t/(1 + |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, e si considerino le funzioni

$$d_1(x, y) := \varphi(|x - y|), \qquad d_2(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che d_1 e d_2 sono metriche su $\mathbb{R}$. Stabilire se le corrispondenti topologie sono equivalenti a quella euclidea. I corrispondenti spazi metrici sono completi?

Esercizio 4.7. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Dimostrare che:

(a) la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \qquad x_1, x_2 \in X,\ y_1, y_2 \in Y,$$

è una metrica in $X \times Y$;
(b) una successione (x_n, y_n) converge a (x, y) in $(X \times Y, d)$ se e solo se (x_n) converge a x in (X, d_X) e (y_n) converge a y in (Y, d_Y);

(c) lo spazio metrico $(X \times Y, d)$ è completo se e solo se sono completi entrambi gli spazi (X, d_X) e (Y, d_Y).

Generalizzare il risultato al caso del prodotto cartesiano di un numero finito di spazi metrici.

Esercizio 4.8. Sia $\varphi(t) := t/(1+|t|)$, $t \in \mathbb{R}$, e si considerino in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} &d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + \varphi(|y_1 - y_2|), \\ &\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + |\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Dimostrare che d e δ sono metriche su $\mathbb{R}^2$ e stabilire se i corrispondenti spazi metrici sono completi.

Esercizio 4.9. Sia $\varphi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione crescente, tale che $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ per ogni $t > 0$, e sub-additiva, cioè tale che

$$\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s) \qquad \forall t, s \geq 0.$$

Definiamo $d(x, y) := \varphi(|x - y|)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

(a) $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico completo;
(b) se φ è continua e strettamente crescente, allora d genera la stessa topologia della metrica euclidea.

Esercizio 4.10. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Definiamo $d(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$, $x, y \in I$. Dimostrare che:

(a) (I, d) è uno spazio metrico;
(b) se φ è continua, allora (I, d) ha la stessa topologia di $(I, |\cdot|)$;
(c) se $\varphi(I) = \mathbb{R}$, allora (I, d) è completo;
(d) se φ è continua, $I = \mathbb{R}$ e $\varphi(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$, allora $(\mathbb{R}, d)$ non è completo.

5. UNIFORME CONTINUITÀ

Osservazione. Per dimostrare, utilizzando la definizione, che una funzione $f\colon X \to Y$ **non** è uniformemente continua, occorre mostrare che

$$\exists \epsilon_0 > 0 \text{ t.c. } \forall \delta > 0\ \exists x_\delta, y_\delta \in X \text{ con } d_X(x_\delta, y_\delta) < \delta,\ d_Y(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \epsilon_0. \tag{1}$$

In particolare, è sufficiente costruire due successioni $(x_n), (y_n)$ in X tali che

$$\lim_n d_X(x_n, y_n) = 0, \qquad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Esercizio 5.1. Mostrare, usando (2), che la funzione $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, *non* è uniformemente continua in $(0, +\infty)$.

Esercizio 5.2. Mostrare, usando (2), che la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, *non* è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.3. Siano $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ due intervalli, con $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, e sia $I = I_1 \cup I_2$ la loro unione. Dimostrare che, se la funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua sia in I_1 che in I_2, allora f è uniformemente continua in tutto I.

Esercizio 5.4. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Diremo che una funzione $f\colon X \to Y$ è Lipschitziana se esiste $L > 0$ tale che

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x, y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Dimostrare che una funzione Lipschitziana è uniformemente continua in X.
Dedurre, in particolare, che se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con derivata limitata, allora f è Lipschitziana e dunque uniformemente continua in I.

Esercizio 5.5. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Diremo che una funzione $f\colon X \to Y$ è α-Hölderiana, con $\alpha \in (0, 1]$, se esiste $L > 0$ tale che

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x, y)^\alpha, \qquad \forall x, y \in X. \tag{3}$$

Dimostrare che una funzione α-Hölderiana è uniformemente continua in X.

Esercizio 5.6. Sia $\alpha \in (0, 1)$. Dimostrare che la funzione $f(x) := |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, è α-Hölderiana (dunque uniformemente continua) in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.7. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) due spazi metrici, e sia $f\colon X \to Y$ una funzione uniformemente continua.

(a) Dimostrare che f manda successioni di Cauchy in X in successioni di Cauchy in Y. In altri termini, se $(x_k)_k \subset X$ è una successione di Cauchy in X, allora $(f(x_k))_k$ è una successione di Cauchy in Y.

(b) Sia (Y, d_Y) completo. Dimostrare che, se $(x_k)_k$ e $(x'_k)_k$ sono due successioni di Cauchy in X tali che

$$\lim_{k \to +\infty} d_X(x_k, x'_k) = 0,$$

allora $(f(x_k))_k$ e $(f(x'_k))_k$ convergono allo stesso limite.

Esercizio 5.8. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato ed $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che f è uniformemente continua in E se e solo se esiste una sua estensione continua $F\colon \overline{E} \to \mathbb{R}$, cioè tale che $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.

Esercizio 5.9 (Teorema della farfalla)**.** Dimostrare che, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua, allora esistono $a, b > 0$ tali che

$$|f(x)| \leq a|x| + b, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Interpretare graficamente il risultato. Osservare che il medesimo risultato vale anche se f è definita solo su una semiretta.

Esercizio 5.10 (Teorema dell'asintoto)**.** Sia $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che, se f ammette asintoto orizzontale od obliquo per $x \to +\infty$, allora f è uniformemente continua.

Esercizio 5.11. Siano $f, g\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni uniformemente continue. Dimostrare che $f+g$ è uniformemente continua. Dimostrare inoltre che, se entrambe le funzioni sono limitate oppure se E è limitato, allora anche la funzione $f \cdot g$ è uniformemente continua.

Esercizio 5.12. Stabilire, eventualmente utilizzando i risultati degli Esercizi 5.3, 5.4, 5.5, 5.8, 5.9, 5.10, se le seguenti funzioni sono uniformemente continue negli intervalli indicati:

(a) $f(x) = x^3$, $x \in [0, +\infty)$;
(b) $f(x) = (e^x - 1)/x$, $x \in (0, 1]$;
(c) $f(x) = (\sin x)/x$, $x \in (0, +\infty)$;
(d) $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x) = \sqrt{x}\, \arctan(x)$, $x \in [0, +\infty)$.

Esercizio 5.13. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica. Dimostrare che, se $g(x) := f(x^2)$ è uniformemente continua, allora f è costante. Dedurre, in particolare, che le funzioni $\sin(x^2)$ e $\cos(x^2)$ non sono uniformemente continue in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.14. Dimostrare che una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, è uniformemente continua se e solo se esiste una funzione (detta *modulo di continuità*) $\omega\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{r \to 0+} \omega(r) = 0 = \omega(0), \qquad |f(x) - f(y)| \le \omega(|x - y|) \quad \forall x, y \in I.$$

Si dimostri che, in tal caso, la funzione ω può essere scelta continua e monotona non decrescente.

Esercizio 5.15. Determinare un modulo di continuità per le funzioni Lipschitziane e α–Hölderiane.

6. TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Esercizio 6.1. Dimostrare, utilizzando in maniera opportuna il teorema delle contrazioni, che l'equazione $\cos x = x$ ammette un'unica soluzione reale.

Esercizio 6.2. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f\colon X \to X$ una funzione soddisfacente

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in X,\ x \neq y. \tag{4}$$

Dimostrare che f ha un unico punto fisso. Mostrare che, se X è completo ma non compatto, la condizione (4) non è sufficiente per garantire l'esistenza di un punto fisso.

Esercizio 6.3. Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia $f\colon X \to X$ una funzione tale che la sua iterata m-esima

$$f^m := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ volte}}$$

sia una contrazione per qualche $m \in \mathbb{N}^+$. Dimostrare che f ammette uno ed un solo punto fisso in X.

Esercizio 6.4. Sia $\lambda > 0$ un parametro fissato e si consideri, nello spazio metrico completo $(C^0([0, \lambda]), d_\infty)$, l'operatore

$$T\colon C^0([0, \lambda]) \to C^0([0, \lambda])$$

definito da

$$(Tu)(t) := \int_0^t |u(s)|\, ds, \quad t \in [0, \lambda], \qquad \forall u \in C^0([0, \lambda]).$$

Dimostrare che T ammette uno ed un solo punto fisso $\bar{u}$, facendo vedere in particolare che:

(a) T è un'applicazione Lipschitziana con (minima) costante di Lipschitz λ; in particolare, T è una contrazione solo se $\lambda \in (0, 1)$;

(b) per ogni $\lambda > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}^+$ tale che T^m è una contrazione (dunque T ha un unico punto fisso grazie all'Esercizio 6.3).

Mostrare inoltre che $\bar{u} \in C^\infty([0, \lambda])$ e individuare la relazione che lega $\bar{u}$ alla sua derivata prima.

Esercizio 6.5 (Metodo di Newton)**.** Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Dimostrare che f ha un unico zero $\bar{x} \in (a,b)$ e che, per ogni $x_0 \in [a,b]$ sufficientemente vicino a $\bar{x}$, la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

converge a $\bar{x}$. Interpretare geometricamente la relazione di ricorrenza.
Suggerimento: dimostrare dapprima che f ha un unico zero $\bar{x}$; mostrare poi che esiste un opportuno intervallo chiuso $I \subseteq [a,b]$ centrato in $\bar{x}$ tale che la funzione $F(x) := x - f(x)/f'(x)$ è una contrazione da I in I.

7. SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Esercizio 7.1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo la funzione

$$f_n(x) := \lim_{k\to+\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che (f_n) converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$ a una funzione f che non è Riemann–integrabile su alcun intervallo limitato della retta reale.

Esercizio 7.2. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo la funzione

$$f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che (f_n) converge puntualmente a una funzione derivabile f e che $f'(0) = 0$. Mostrare che, tuttavia, la successione delle derivate prime (f_n') non converge puntualmente in $x = 0$.

Esercizio 7.3. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo la funzione

$$f_n(x) := nx(1-x^2)^n\,, \qquad x \in [0,1].$$

Dimostrare che (f_n) converge puntualmente alla funzione $f \equiv 0$. Mostrare che, tuttavia,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f\,.$$

Esercizio 7.4. Sia (f_n) una successione di funzioni limitate in $A \subseteq \mathbb{R}$, vale a dire, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $M_n \geq 0$ tale che

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \forall x \in A.$$

Dimostrare che, se (f_n) converge uniformemente in A a una funzione f, allora f è limitata e la successione è uniformemente limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che

$$|f_n(x)| \leq M \qquad \forall x \in A,\ n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 7.5. Sia (f_n) una successione di funzioni continue uniformemente convergente a una funzione f in $E \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che se $(x_n) \subset E$ è una successione convergente a $x \in E$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)\,.$$

Il risultato rimane vero in ipotesi di sola convergenza puntuale?

Esercizio 7.6. Sia (f_n) una successione di funzioni continue, convergente uniformemente a una funzione f nell'intervallo aperto (a, b). Supponiamo che f ammetta un punto di minimo stretto in (a, b), cioè che esista $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f(x_0) < f(x) \qquad \forall x \in (a, b),\ x \neq x_0.$$

Dimostrare che esiste una successione di punti $(x_n) \subset (a, b)$, convergente a x_0, tale che la funzione f_n ha un punto di minimo locale in x_n per ogni n sufficientemente grande.

Esercizio 7.7. Per le successioni di funzioni indicate, determinare l'insieme di convergenza puntuale E e il limite puntuale. Stabilire poi se la convergenza è uniforme negli insiemi indicati.

(a) $f_n(x) := \dfrac{x}{x^2 + 1/n}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^+$; convergenza uniforme in $[0, +\infty)$ e $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

(b) $f_n(x) := \dfrac{2 + nx}{1 + nx} \log\left(\dfrac{1}{n} + x\right)$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^+$; convergenza uniforme in $(0, 1]$, $[1, 2]$ e $[1, +\infty)$.

(c) $f_n(x) := \dfrac{x(x-n)}{n[1 + (x-n)^2]}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$; convergenza uniforme in E e in $(-\infty, a] \cap E$ con $a \in \mathbb{R}$.

(d) $f_n(x) := \dfrac{nx}{\sqrt{n^2x^2 - 2nx + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$; convergenza uniforme in $[-1, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

(e) $f_n(x) := \dfrac{2 + \sin(nx)}{1 + (n^2x^2 - 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$; convergenza uniforme in $[-1, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

Esercizio 7.8. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}\,, \qquad x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}^+.$$

(a) Dimostrare che (f_n) converge puntualmente su tutto $[0, +\infty)$ e calcolarne il limite puntuale.

(b) Dimostrare che (f_n) converge uniformemente su ogni semiretta del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

(c) Dimostrare che (f_n), pur essendo equilimitata, non ammette alcuna sottosuccessione che converge uniformemente su $[0, 1]$.

Esercizio 7.9. Sia $f \in C([0, 1])$ e supponiamo che

$$\int_0^1 f(x)\, x^n\, dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Esercizio 7.10. Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Dimostrare che esiste una successione (P_n) di polinomi tale che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b |f(x) - P_n(x)|^2\, dx = 0\,.$$

8. SERIE DI FUNZIONI E DI POTENZE

Esercizio 8.1 (Funzione continua mai derivabile)**.** Si consideri la funzione $\varphi(x) := |x|$, $x \in [-1,1]$, e la si estenda con periodicità a tutto $\mathbb{R}$ in modo tale che $\varphi(x+2) = \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si definisca la funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)\,.$$

Si dimostri che f è continua ma non è derivabile in alcun punto.

Esercizio 8.2. Dimostrare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

converge uniformemente su qualsiasi intervallo limitato ma non converge assolutamente per alcun valore di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.3. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x+n}{n(1+nx)^2}\,, \qquad x > 0.$$

Determinare l'insieme E di convergenza puntuale della serie. Stabilire inoltre se la serie converge uniformemente in $E \cap [1,+\infty)$ e se la sua somma è derivabile in E.

Esercizio 8.4. Dimostrare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{nx}{\log n} - n^2 \sin \frac{x}{n \log n}\right)\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

converge su tutto $\mathbb{R}$ e che la sua somma è continua.

Esercizio 8.5. Determinare l'insieme E di convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(\frac{1}{x} \sin \frac{x}{n^2}\right) - 1\right]\,, \qquad x > 0,$$

e stabilire se la serie converge uniformemente in E.

Esercizio 8.6. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze in campo complesso:

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n^2+1)3^n}\,, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)2^n}\, z^{2n}\,, \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z-1)^n}{(4^n+1)}\,.$$

Esercizio 8.7. Mostrare che le seguenti funzioni sono analitiche in $\mathbb{R}$ e calcolarne lo sviluppo di Mac Laurin:

(a) la funzione *seno integrale*, definita da

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,, dt, \qquad x \in \mathbb{R};$$

(b) la *funzione degli errori* (error function), definita da

$$\mathrm{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,, dt, \qquad x \in \mathbb{R};$$

(c) la *funzione integrale di Fresnel*, definita da

$$\mathrm{S}(x) := \int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2} \, , dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.8. Mostrare che le seguenti funzioni sono analitiche in un opportuno intervallo $(-r, r)$, $0 < r \leq +\infty$, e calcolarne lo sviluppo di Mac Laurin:

(a) $f(x) = \log \sqrt{1+x^2}$;
(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
(c) $f(x) = \operatorname{arcsinh}(x) := \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$.
(e) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-5x+6}$.

Esercizio 8.9. Determinare il raggio di convergenza e la somma delle seguenti serie di potenze in campo reale:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n!}\,, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}\,, \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\,, \qquad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n\,.$$

9. SERIE DI FOURIER

Data $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e localmente integrabile, la serie di Fourier associata a f è

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]$$

dove i coefficienti di Fourier a_k e b_k sono dati da

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(kx)\, dx, \qquad k = 0, 1, \dots,$$
$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin(kx)\, dx, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Ricordiamo che vale l'uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\right].$$

Esercizio 9.1. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$, localmente integrabile. Dimostrare che

$$\int_x^{T+x} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 9.2. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, di classe C^1 a tratti. Dimostrare che f soddisfa il teorema fondamentale del calcolo integrale, vale a dire,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt, \qquad \forall x_0, x \in \mathbb{R}.$$

(Osservare che la funzione integranda f' può essere non definita in un numero finito di punti nell'intervallo di estremi x_0 e x; in ogni caso, l'integrale di Riemann di f' è ben definito.)

Mostrare, con un esempio, che la sola regolarità C^1 a tratti (senza l'ipotesi di continuità) non garantisce la validità della formula.

Esercizio 9.3. Sia $D_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il *nucleo di Dirichlet*, definito da

$$D_n(x) := \begin{cases} n + 1/2, & \text{se } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = \pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx = +\infty.$$

Esercizio 9.4. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) = 1 + \cos x + 3\sin(2x).$$

Esercizio 9.5. Si consideri la funzione $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, estesa con periodicità a tutto $\mathbb{R}$ (*onda triangolare*).

(a) Calcolare i coefficienti di Fourier di f.
(b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f.
(c) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Esercizio 9.6. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π–periodica definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = -1$, se $x \in (-\pi, 0]$, $f(x) = 1$, se $x \in (0, \pi]$ (*onda quadra*).

(a) Calcolare i coefficienti di Fourier di f.
(b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f.
(c) Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(d) [*Fenomeno di Gibbs*] Detta s_n la somma parziale n-esima della serie di Fourier, dimostrare che $s_{2n-1} = s_{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$s_{2n}'(x) = \begin{cases} 4n(-1)^k/\pi, & \text{se } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{\sin(2nx)}{\sin x}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dedurre che s_{2n} ha un punto di massimo relativo (risp. minimo relativo) in $\delta_n := \pi/(2n)$ (risp. in $-\delta_n$). Posto $\Delta_n := s_{2n}(\delta_n) - s_{2n}(-\delta_n)$, valutare $\lim_n \Delta_n$ in termini della *costante di Wilbraham–Gibbs* G definita da

$$G := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \simeq 1.178980...$$

Esercizio 9.7. Date le funzioni 2π-periodiche definite in $(-\pi, \pi]$ come segue, determinarne lo sviluppo in serie di Fourier e discuterne la convergenza puntuale e uniforme:

$$(a) \quad f(x) = x^2, \qquad (b) \quad f(x) = x.$$

Dimostrare inoltre che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 9.8. Si consideri la funzione $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$ (*mantissa* di x).

(a) Calcolare i coefficienti di Fourier di f.
(b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f.

10. Funzioni di più variabili

Esercizio 10.1. Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente.

$$(a)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} \qquad (b)\ f(x,y) = \log(4 - x^2 - y^2), \qquad (c)\ f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$$

Esercizio 10.2. Stabilire se le seguenti funzioni ammettono limite nell'origine, e in caso affermativo calcolarlo.

$$(a)\ f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad (b)\ f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad (c)\ f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}\,,$$
$$(d)\ f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,, \qquad (e)\ f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}\,, \qquad (f)\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,,$$
$$(g)\ f(x,y) = \frac{x^2y}{x^6+y^2}\,, \qquad (h)\ f(x,y) = xy\,\log(x^2+y^2).$$

Esercizio 10.3. Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta > 0$ è continua nell'origine la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 10.4. Stabilire se le funzioni

$$(a) \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$
$$(b) \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

sono continue, direzionalmente derivabili, differenziabili nell'origine.

Esercizio 10.5. Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^6 + x^2y + x^2y^4}{x^2+y^4}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è continua, derivabile direzionalmente, differenziabile nell'origine.

Esercizio 10.6. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$;
(b) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$;
(c) $f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^4)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Esercizio 10.7. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$ e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $f = f(t, x_1, \dots, x_n)$, una funzione tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\Omega) \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dimostrare che, per ogni cilindro compatto $K = [a, b] \times \overline{B}_R(\mathbf{x}_0)$ contenuto in Ω, esiste una costante $L_K \geq 0$ tale che

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \leq L_K \, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad \forall t \in [a, b], \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B}_R(\mathbf{x}_0).$$

(Una funzione soddisfacente la tesi si dice localmente Lipschitziana in $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a t.) Osservare, in particolare, che le ipotesi sono soddisfatte se $f \in C^1(\Omega)$.

Esercizio 10.8. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \\ x^2 + y^2 - 2x^2 y - \dfrac{4x^6 y^2}{(x^4 + y^2)^2}\,, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

(a) Dimostrare che f è continua nell'origine. (Può essere utile dimostrare preliminarmente che $4x^4 y^2 \leq (x^4 + y^2)^2$ per ogni x, y.)
(b) Dato un vettore non nullo $\mathbf{v} = (h, k) \neq (0, 0)$ si consideri la restrizione $g(t) := f(t\mathbf{v}) = f(th, tk)$, $t \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = 2(h^2 + k^2) > 0$, dunque g ha un minimo locale stretto per $t = 0$.
(c) Dimostrare che f non ha un punto di minimo locale nell'origine.

11. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizio 11.1. Sia $\mathbf{u}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, una funzione vettoriale tale che $u_i \in \mathcal{R}([a, b])$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Si definisca l'integrale vettoriale

$$\int_a^b \mathbf{u}(t)\, dt := \left(\int_a^b u_1(t)\, dt, \dots, \int_a^b u_n(t)\, dt \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrare che la funzione $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|$ è Riemann–integrabile in $[a, b]$ e

$$\left\| \int_a^b \mathbf{u}(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{u}(t)\|\, dt.$$

Esercizio 11.2. Determinare le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy associati alle seguenti equazioni:

$$(a) \quad x' = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}, \qquad (b) \quad x' = \sqrt{|x|}, \qquad (c) \quad x' = x^2,$$

$$(d) \quad x' = 2tx^2, \qquad (e) \quad x\,x' = \frac{1 + x^2}{t}\,, \qquad (f) \quad \frac{x'}{x^2 - 1} = \frac{e^t}{2x}\,.$$

Esercizio 11.3. Determinare la soluzione massimale dei seguenti problemi di Cauchy:

$$(a) \begin{cases} x' = t^2 x^3, \\ x(1) = 2, \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x' = \dfrac{x}{t(t-2)}, \\ x(1) = 1, \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} \dfrac{x'}{\sqrt{x}} = \dfrac{2t}{1 - t^2}, \\ x(2) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 11.4. Sia $\varphi\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $\varphi'(t) \leq M\,\varphi(t)$ per ogni $t \in [t_0, T]$, con $M \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\varphi(t) \leq e^{M(t - t_0)} \varphi(t_0)$ per ogni $t \in [t_0, T]$.

Esercizio 11.5. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}\colon [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ due soluzioni dell'equazione differenziale $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, con $\mathbf{f}$ continua in un compatto $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenente il grafico delle due soluzioni e soddisfacente

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\| \le L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \qquad \forall (t,\mathbf{x}), (t,\mathbf{y}) \in K.$$

Dimostrare che

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\| \le e^{L(t-t_0)}\|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{v}(t_0)\| \qquad \forall t \in [t_0, T].$$

Esercizio 11.6. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$(a)\ x' = x + tx^2, \qquad (b)\ x' = -\frac{x}{t} + \sqrt{x}, \qquad (c)\ x' = -\frac{x}{6t} + \frac{t}{2x^5}\,.$$

Esercizio 11.7. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$tx' = 4(t+1)x + 8t^3\sqrt{x}$$

e determinare le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ soddisfacenti alla condizione $x(1) = 0$.

Esercizio 11.8. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$(a)\ x'' + x = t^2, \qquad (b)\ x'' + 3x' = t^2 + 1, \qquad (c)\ x'' - 2x' - 3x = -\sin(3t).$$

Esercizio 11.9. Determinare la soluzione dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - 2x' + x = 3e^{-t}, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' - 2x' + 5x = te^{2t}, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 11.10. Determinare, al variare di $\omega, \gamma > 0$, l'integrale generale dell'equazione

$$x'' + \omega^2 x = A\,\cos(\gamma t).$$

Interpretare fisicamente il risultato (si veda questo filmato).

Riferimenti bibliografici

[1] G. Crasta and A. Gavioli, Temi d'esame svolti di Analisi Matematica II, Pitagora Editrice, 1997.
[2] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 0385023 (52 #5893)
[3] W.F. Trench, Introduction to Real Analysis, Free Hyperlinked Edition, 2003.