Esercizio 1.7. Sia $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e sia $\varphi\colon \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\varphi(x) := \begin{cases} \arctan x, & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ \pi/2, & \text{se } x = +\infty, \\ -\pi/2, & \text{se } x = -\infty. \end{cases}$$

Dimostrare che la funzione

$$d(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|, \qquad x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

è una metrica in $\overline{\mathbb{R}}$. Come sono fatti gli intorni dei punti $\pm\infty$?

Esercizio 1.8. Consideriamo lo spazio $X := C^0([a,b])$. Fissata una costante $L > 0$, si definisca la funzione $d_*\colon X \times X \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$d_*(f,g) := \max_{x \in [a,b]} e^{-2L(x-a)} |f(x) - g(x)|\,, \qquad \forall f, g \in X.$$

Dimostrare che d_* è una metrica su X equivalente alla metrica d_∞.

Esercizio 1.9. Sia $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione L-Lipschitziana, soddisfacente cioè la condizione

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L\,|x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(La costante $L > 0$ è anche detta *costante di Lipschitz* della funzione Φ.)
Sia $X = C^0([a,b])$, munito della metrica d_* definita nell'Esercizio 1.8. Consideriamo l'applicazione $T\colon X \to X$, $f \mapsto T[f]$, definita da

$$T[f](x) := \int_a^x \Phi(f(s))\,ds, \qquad f \in X,\ x \in [a,b].$$

Dimostrare che

$$d_*(T[f], T[g]) \leq \frac{1}{2}\, d_*(f,g) \qquad \forall f, g \in X,$$

vale a dire, T è un'applicazione $(1/2)$-Lipschitziana da X in X rispetto alla metrica d_*.

2. TOPOLOGIA

Esercizio 2.1. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Dimostrare che

(a) se $x \in E$, allora $x \in \mathrm{int}E$ oppure $x \in \partial E$;
(b) se $x \in E$, allora $x \in E'$ oppure x è isolato;
(c) se $x \in \partial E$, allora $x \in E'$ oppure x è isolato;
(d) se $x \in \mathrm{int}E$, allora $x \in E$;
(e) se x è isolato, allora $x \in E$;
(f) se $x \in E'$, allora $x \in \mathrm{int}E$ oppure $x \in \partial E$;
(g) se x è un punto isolato, allora $x \in \partial(E^C)$.

Esercizio 2.2. Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Dimostrare che se $x \in E'$, allora ogni intorno di x contiene infiniti punti di E.

Esercizio 2.3. Sia (X,d) uno spazio metrico, sia $E \subseteq X$ e siano $x \in X$, $r > 0$. Dimostrare che se $B_r(x) \cap E = \emptyset$, allora $B_r(x) \cap E' = \emptyset$.

Esercizio 2.4. ([3, Ex. 8.1.12]) Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Dimostrare che

(a) ∂E è chiuso;
(b) $\mathrm{int}E$ è aperto;

(c) E è aperto se e solo se $E = \text{int}E$;
(d) l'insieme dei punti esterni ad E è aperto;
(e) E' è chiuso.

Esercizio 2.5. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto. Quali sono gli insiemi aperti in X? E quelli chiusi?

Esercizio 2.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subset X$ un suo sottoinsieme finito. Dimostrare che E è chiuso.

Esercizio 2.7. ([3, Ex. 8.1.6]) Sia (X, d) uno spazio metrico.
(a) Siano dati $x \in X$ e $r > 0$. Posto $E := B_r(x)$, dimostrare che

$$\overline{E} \subseteq \{y \in X : \ d(y, x) \leq r\} .$$

(b) Sia d la metrica discreta in X, sia $x \in X$ e sia $E := B_1(x)$ Dimostrare che, se X contiene più di un punto, allora

$$\overline{E} \neq \{y \in X : \ d(y, x) \leq 1\} .$$

(c) Dimostrare che, se la metrica d è indotta da una norma $\| \cdot \|$ su X (vale a dire, se $(X, \| \cdot \|)$ è uno spazio normato e $d(x, y) = \|x - y\|$ per ogni $x, y \in X$), allora in (a) vale l'uguaglianza fra i due insiemi, cioè

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in X : \ \|y - x\| \leq r\}.$$

Esercizio 2.8. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Dimostrare che $\partial(\partial E) \subseteq \partial E$. Mostrare, con un esempio, che l'inclusione può essere stretta.

Esercizio 2.9. Sia (X, d) uno spazio metrico. Diremo che una funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente (s.c.i.) in $x \in X$ se

$$f(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n)$$

per ogni successione $(x_n)_n \subset X$ convergente a x. Dimostrare che f è s.c.i. in ogni punto $x \in X$ se e solo se, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello

$$C_\alpha := \{x \in X : \ f(x) \leq \alpha\}$$

è chiuso in X.

3. COMPATTEZZA

Esercizio 3.1. Si dimostri che l'intervallo $(0, 1)$ non è compatto in $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, esibendo una sua copertura aperta dalla quale non sia possibile estrarre una sottocopertura finita.

Esercizio 3.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che qualsiasi sottoinsieme finito di X è compatto.

Esercizio 3.3. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto (vale a dire, sia d la metrica discreta sull'insieme X). Dimostrare che, se $E \subset X$ è infinito, allora E non è compatto.

Esercizio 3.4. In $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ dimostrare, usando la definizione, che $\mathbb{Z}$ non è compatto.

Esercizio 3.5. In $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ consideriamo l'insieme $K := \{0\} \cup \{1/n : \ n \in \mathbb{N}^+\}$. Dimostrare, usando la definizione, che K è compatto.