ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1

Limiti, Funzioni uniformemente continue

(1) Calcolare o dimostrare che non esistono i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y}{x^2+3y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y+3y^3}{x^2+3y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^{-\frac{1}{xy^2}}}{x^2+3y^2}.$$

(2) Determinare se sono uniformemente continue le seguenti funzioni.
- Per A a una matrice $N\times N$, sia $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{< Ax, x >}$.
- $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{|x|+1}$ for $x\in\mathbb{R}^N$
- Considera $f(x)=\sin(< e_j, x >)$ e $g(x)=\sin(|x|^2)$.

(3) Sia $f: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\log\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$
- Determinare l'insieme di definizione della funzione f.
- Determinare se f è omogenea.
- Determinare se la funzione è uniformemente continua nel suo insieme di definizione.
- Disegnare i punti del piano $\mathbb{R}^2$ tali che, $f(x,y)=0$, $f(x,y)=1$, $f(x,y)=-1$.

(4) Dimostrare che $f(x)=x$ e $g(x)=\sin x$ sono uniformmente continue in $\mathbb{R}$ ma che la funzione $h(x)=f(x)g(x)$ non lo è .

(5) Dimostrare che se f e g sono uniformemente continue nello stesso insieme e se sono limitate allora il loro prodotto è uniformemente continuo.

(6) Dimostrare che se f è periodica e continua allora è uniformemente continua.

(7) Dimostrare che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono Lipschitziane.

Date: March 30, 2016.