ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1

Spazi Metrici, teorema delle contrazioni, Funzioni uniformemente continue

(1) Verificare se sono uniformemente continue le seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin(\frac{1}{x}) \text{ in } (0,1), \quad f(x) = x^2 \text{ in } \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} \text{ in } [0,+\infty),$$

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^2} \text{ in } \mathbb{R}^N$$

(2) Data una matrice A, determinare se

$$f(x) = < Ax, x > \text{ in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^N,$$

è uniformemente continua.

(3) Sia $f(x,y) = (\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + 1, \frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 2)$, verificare che f è una contrazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, con la norma l_p che vi fa piu' comodo.

(4) Sia A una matrice simmetrica e $b \in \mathbb{R}^N$. Determinare delle condizioni sufficienti sulla matrice A affinchè $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $F(x) = Ax + b$ sia una contrazione.

(5) Sia $T : l_p \to l_p$ tale che $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$ dove

$$y_1 = 0, \; y_n = x_{n-1}.$$

Verificare se T è una contrazione. Determinare un punto fisso di T.

(6) Sia $T : l_p \to l_p$ tale che $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$ dove

$$y_1 = 0, \; y_n = x_{n-1}.$$

Verificare se T è una contrazione. Determinare i punti fissi di T.

(7) Sia $S : l_p \to l_p$ tale $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$ dove

$$y_n = x_{n+1}.$$

Verificare se S è una contrazione. Determinare i punti fissi di T.

(8) Sia $X_M = C^o([-M,M])$ con la norma del sup. Sia $T : C^o([-M,M]) \to C^o([-M,M])$ tale che

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$$

.

- Determinare per quali $M > 0$, T è una contrazione.
- Fissato $f_1(x) \equiv 1$. Definiamo $f_n(x) = Tf_{n-1}(x)$. Calcolare f_2 e f_3. Dimostrare, per induzione, che $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$.
- Dimostrare che f è un punto fisso per T se e solo se f verifica $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$.
- Usando il teorema delle contrazioni e i risultati precedenti dimostrare che $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Date: March 27, 2016.