ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1

(1) Per le seguenti funzioni delle 2 variabili (x, y) calcolare i limiti indicati o spiegare perchè non esistono:
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$
- $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$

(2) Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy}{\max(x,y)} & x \geq 0,\ y \geq 0, (x,y) \neq (0,0) \\ x & \text{altrove.} \end{cases}$$
Determinare se f è positivamente omogenea, se è continua in $\mathbb{R}^2$, studiare l'uniforme continuità .

(3) Sia
$$f(x,y) = \arccos \frac{< x, y >}{||x||\,||y||}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$
Determinarne l'insieme di definizione e studiarne la limitatezza. Determinare, se esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(4) Studiare convergenza e convergenza assoluta delle seguenti serie
$$\sum_{i=3}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n\log(n-1)\sqrt{\log n}}$$
$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(-1)^n + 1}$$
$$\sum_{i=1}^{+\infty} ((1+\frac{1}{n})^n - e)$$

(5) Sia $f(x,y)$ una funzione continua in $[0,1]\times[0,1]$ e sia x_n una successione in $[0,1]$ convergente a $x_o \in [0,1]$. Dimostrare che la successione di funzioni $g_n(y) = f(x_n, y)$ converge uniformemente in $[0,1]$.

(6) Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$. Studiare in $\mathbb{R}$, la convergenza uniforme di
$$g_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos(t)\sin^n(t) f(xt)dx.$$

Date: April 13, 2016.