ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1

GRAZIANO CRASTA

1. SPAZI METRICI

Esercizio 1.1. ([2, Ex. 2.11]) Stabilire quali fra le seguenti funzioni sono metriche in $\mathbb{R}$.

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \qquad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|,$$
$$d_4(x,y) = |x - 2y|, \qquad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,.$$

Esercizio 1.2. Sia X un insieme e siano d_1, d_2 metriche su X. Diremo che le metriche d_1e d_2 generano la stessa topologia se un insieme è aperto in (X, d_1) se e solo se è aperto in (X, d_2). Dimostrare che:

(a) le due metriche generano la stessa topologia se e solo se per ogni $x \in X$ qualsiasi intorno di x nella metrica d_1 contiene un intorno di x nella metrica d_2 e viceversa;
(b) se le due metriche generano la stessa topologia, allora i corrispondenti spazi metrici hanno le stesse successioni convergenti.

Esercizio 1.3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la funzione

$$\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\,, \qquad x, y \in X,$$

è una metrica in X. Dimostrare inoltre che d e $\tilde{d}$ generano la stessa topologia.

Esercizio 1.4. Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Dimostrare che la funzione

$$d(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

è una metrica su $\mathbb{R}$. Dimostrare inoltre che, se φ è continua (rispetto all'usuale metrica euclidea), allora la metrica d genera la stessa topologia della metrica euclidea.

Esercizio 1.5. Sia $\varphi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione *sub-additiva*, cioè tale che

$$\varphi(t+s) \le \varphi(t) + \varphi(s) \quad \forall t, s \ge 0.$$

Supponiamo inoltre che φ sia crescente e che

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(t) > 0 \quad \forall t > 0.$$

Dimostrare che, se (X, d) è uno spazio metrico, allora $\tilde{d}(x,y) := \varphi(d(x,y))$, $x, y \in X$, è una metrica in X.

Esercizio 1.6. Sia $\varphi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione concava tale che $\varphi(0) = 0$. Dimostrare che φ è sub-additiva. Concludere che le funzioni

$$\varphi_1(t) := \arctan t, \quad \varphi_2(t) := \frac{t}{1+t}, \qquad t \ge 0,$$

soddisfano le ipotesi elencate nell'Esercizio 1.5.

Date: 9 maggio 2015.