Gruppo esercizi 1: Spazi metrici

[E.1] (8 pt) Dimostrare che la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + \left| \frac{1}{y_1 e^{y_1}} - \frac{1}{y_2 e^{y_2}} \right|, \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X := \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

è una distanza su X. Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo.
Nota: Non è completo; considerare una successione con $y_n \to +\infty$.

[E.2] (8 pt) Dimostrare che la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \left| \frac{x_1}{4 - x_1^2} - \frac{x_2}{4 - x_2^2} \right| + |y_1 - y_2|, \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X := (-2, 2) \times \mathbb{R}$$

è una distanza su X. Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo.
Nota: È completo.

[E.3] (8 pt) Dimostrare che la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \left| \frac{e^{x_1}}{1 + e^{x_1}} - \frac{e^{x_2}}{1 + e^{x_2}} \right| + |y_1 - y_2|, \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X := \mathbb{R}^2$$

è una distanza su X. Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo.
Nota: Non è completo; considerare una successione con $x_n \to \pm\infty$.

[E.4] (8 pt) Dimostrare che la funzione

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + \left| \frac{y_1 |y_1|}{1 + y_1^2} - \frac{y_2 |y_2|}{1 + y_2^2} \right|, \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X := \mathbb{R}^2$$

è una distanza su X. Stabilire se lo spazio metrico (X, d) è completo.
Nota: Non è completo; considerare una successione con $y_n \to \pm\infty$.