ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1

Equazioni differenziali

(1) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = x + 2y \\ (x(0), y(0)) = (1, 1) \end{cases}$$

Studiare anche il dato iniziale $(x(0), y(0)) = (2, -1)$.

(2) Determinare l'integrale generale del sistema $x' = A_o x$ dove

$$A_o = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Facoltativo: Determinare l'insieme dei dati iniziali per cui la soluzione del problema di Cauchy associato è periodica.

(3) Sia il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = \frac{t\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-t^2}} \\ x(0) = x_o. \end{cases}$

a) Per $x_o = \frac{1}{2}$ determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

b) Esiste un dato iniziale per cui la soluzione è costante?

(4) a) Dimostrare che per ogni $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^3 \arctan x^2 + \sin x \\ x(t_o) = x_o. \end{cases}$$

b) Verificare che per ogni $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione massimale esiste $\forall t \in \mathbb{R}$

c) Dimostrare che se $x_o > 0$ allora $x(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

d) Verificare che se $x_o > 0$ allora $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

(5) Sia il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - 2x' + (1 + \frac{1}{n^2})x = 0 \\ x(0) = 0;\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

a) Determinarne la soluzione $x_n(t)$

b) Dimostrare che per ogni $M > 0$, x_n converge a $x_o(t) = te^t$ uniformemente in $(-M, M)$.

(6) Trovare l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tale che esista una soluzione non nulla del seguente problema al contorno

$$\begin{cases} x'' + x' + \lambda x = 0 \\ x(0) = 0;\ x(1) = 0 \end{cases}$$

Date: June 1, 2016.