ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1

Equazioni differenziali

(1) Riscrivere le seguenti equazioni come sistemi di equazioni differenziali del primo ordine
$$(a)\, x'' = t + x + e^{x'},\ (b)\, x''' = x \log x' + x'',\ (c)\, x''' = x f(x') g(x'')$$
(2) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy e determinare gli intervalli di esistenza della soluzione
$$\begin{cases} x' - tx = x^3 \\ x(0) = 1 \end{cases},\ \begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = x_o \end{cases}$$
(3) Sia f una funzione continua e crescente. Consideriamo il problema di Cauchy
$$y'(x) = \frac{yf(x)}{1+y},\ y(0) = y_o > 0.$$
Trovare lequazione che esprime la soluzione in forma implicita e verificare che non esplode in tempo finito. Dimostrare inoltre che la soluzione è crescente, convessa e tende a $+\infty$ all'infinito.

(4) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, sono verificate le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità di Cauchy nei seguenti casi,
$$\begin{cases} x' = \cos(|x-1|^\alpha) \sin x \\ x(0) = 1 \end{cases},\ \begin{cases} x' = |x|^{\alpha+1}|x-1|^\alpha e^{-x+1} \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$
(5) Sia $A(t)$ una matrice 2×2 di funzioni continue fissata. Sia X una matrice 2×2 di funzioni derivabili, soluzione dell'equazione
$$X'(t) = A(t)X(t).$$
Dimostare che $W(t) = detX(t)$ è soluzione dell'equazione $W'(t) = tr(A)W'$.

(6) Trovare l'integrale generale dell'equazione $y^{iv}(t) + 2y^{iii}(t) + ey^{ii}(t) = te^t$

(7) Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni
$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{x(t)}{t} \\ y'(t) = tx(t) - ty(t) + e^{2t} \end{cases}$$
Determinare la soluzione del problema di Cauchy associato con dato iniziale $(x(1), y(1)) = (1, 2)$. Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

(8) a) Per $a = 1$ determinare l'intervallo di esistenza e la soluzione massimale del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+ax^2}} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$
b) Per $n \in \mathbb{N}$, sia y_n la soluzione nel caso $a = \frac{1}{n}$. Dimostrare che $y_n(x)$ converge uniformemente in un intorno di 0 alla funzione $y(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (non è necessario calcolare y_n).

Date: May 28, 2016.