SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

1. Successioni di funzioni

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $C^0([0,1];\mathbb{R})$, ovvero tale che f_n è una funzione continua per ogni n in $\mathbb{N}$. Supponiamo di sapere che, per ogni x in $[0,1]$, esiste un numero reale $f(x)$ tale che

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,,$$

ovvero si ha che f_n converge **puntualmente** a f. Sotto quali condizioni la funzione f è, a sua volta, continua?

Osserviamo che il problema appena posto è un problema di "scambio di limiti"; infatti, la continuità di una funzione è definita tramite un limite, e quindi ci stiamo chiedendo se valga la seguente uguaglianza:

$$\lim_{x\to x_0}\big[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big] \stackrel{?}{=} \lim_{n\to+\infty}\big[\lim_{x\to x_0} f_n(x)\big]\,.$$

Infatti, "espandendo" le parentesi quadre, ed usando la continuità di f_n, tale uguaglianza si riscrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)\,.$$

Ora, lo scambio di limiti non è sempre possibile, ed anche quando è possibile non necessariamente le proprietà possedute da f_n per ogni n sono conservate dal limite f.

Esempio 1.1. Consideriamo la successione

$$a_{n,m} = \frac{n}{n+m}\,,\qquad n\,,m\in\mathbb{N}\,.$$

Allora si ha

$$\lim_{m\to+\infty} a_{n,m} = 0\,,\qquad \lim_{n\to+\infty} a_{n,m} = 1\,,$$

e quindi

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\big[\lim_{m\to+\infty} a_{n,m}\big] \neq \lim_{m\to+\infty}\big[\lim_{n\to+\infty} a_{n,m}\big] = 1\,.$$

Osserviamo poi che, per ogni n fissato, la successione $a_{n,m}$ appartiene ad ℓ^2, dato che

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+m)^2} = n^2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+m)^2} = n^2 \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty\,,$$

ma che la successione "limite puntuale" ottenuta tenendo fermo m e facendo tendere n a più infinito è

$$a_{\infty,m} = \lim_{n\to+\infty} a_{n,m} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+m} = 1\,, \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,,$$

e dunque non appartiene ad ℓ^2. In questo caso, lo "scambio di limiti" che non possiamo effettuare è tra

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\lim_{k\to+\infty} \sum_{m=1}^{k} \frac{n^2}{(n+m)^2} \Big) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{k} \Big[\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+m)^2} \Big] \Big)\,.$$

Consideriamo ora $f_n(x) = x^n$ per x in $[0,1]$; si vede facilmente che f_n converge puntualmente a

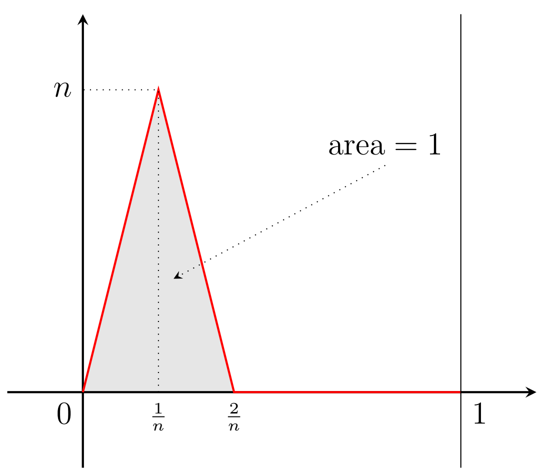
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

che non è una funzione continua. In questo caso, non è permesso operare lo scambio tra

$$\lim_{x\to 1^-} [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)] = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0\,, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} [\lim_{x\to 1^-} f_n(x)] = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1\,.$$

Infine, tanto per gradire, consideriamo la successione di funzioni data da:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2\,x & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2\,x & \text{se } \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} < x \le 1. \end{cases}$$



Si vede facilmente che $f_n(x)$ converge puntualmente a zero, ed in questo caso lo scambio di limiti che non si può fare è quello tra il limite dell'integrale di f_n, e l'integrale del limite di f_n: si ha, infatti,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1\,, \quad \text{e} \quad \int_0^1 [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0\,.$$

Anche questo è uno scambio di limite se si pensa all'integrale come "limite" delle somme integrali per eccesso e per difetto.

Se l'esempio precedente mostra come la convergenza puntuale non sia sufficiente per il passaggio al limite "sotto il segno di integrale", il prossimo mostra come neanche la proprietà di essere integrabile "passa al limite puntuale". Sia infatti $\{x_n\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ un'enumerazione dei razionali in $[0,1]$ (che sappiamo esistere essendo i razionali numerabili), e definiamo, per n in $\mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{x_1, \ldots, x_n\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente, ognuna delle f_n è integrabile secondo Riemann, dato che ha un numero finito di punti di discontinuità, ed ha integrale nullo. Il limite puntuale, però, non è integrabile essendo la funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

L'ultimo esempio è abbastanza complicato, perché ha bisogno di un'enumerazione dei razionali. Il prossimo, invece, permette di costruire la funzione di Dirichlet come limite di una successione di funzioni più "esplicita". Sia infatti n in $\mathbb{N}$ e definiamo la funzione (integrabile secondo Riemann perché discontinua solo in un numero finito di punti)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n!\,x \text{ è un intero}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia ora x razionale in $[0,1]$; allora $x = p/q$, e quindi $n!\,x = n!\,p/q$ è un intero per ogni $n \geq q$. Pertanto, $f_n(x) = 1$ per ogni $n \geq q$, e quindi

$$x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1\,.$$

Se, invece, x non è razionale, allora $n!\,x$ non è mai intero (se lo fosse, essendo $n!$ un intero, x sarebbe razionale). Pertanto, $f_n(x) = 0$ per ogni n in $\mathbb{N}$ se x è irrazionale, e quindi

$$x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0\,,$$

e dunque $f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione di Dirichlet.

Negli ultimi esempi una delle proprietà della successione si perde nel passaggio al limite puntuale: l'appartenenza ad ℓ^2, la continuità, l'avere integrale pari ad 1, e l'integrabilità. Sappiamo già che in ℓ^p un modo di passare da convergenza componente per componente a convergenza in ℓ^p consiste nell'aggiungere un controllo "uniforme" sulla successione (si veda il teorema di convergenza dominata in ℓ^p). Cosa dobbiamo aggiungere alla convergenza puntuale per far sì che la continuità si conservi? E l'integrale? E l'integrabilità?

Fortunatamente, ed almeno per la continuità, abbiamo già una risposta (anche se era "nascosta" all'interno di una dimostrazione...).

Teorema 1.2. *Sia $\{f_n\}$ una successione in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ convergente, in distanza d_∞, ad una funzione f. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Ripetiamo qui, per completezza, la dimostrazione già vista. Innanzitutto, dire che f_n converge a f in d_∞ vuol dire che

$$\lim_{n\to+\infty} [\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|] = 0\,,$$

da cui segue facilmente la convergenza puntuale di f_n ad f dato che

$$0 \le |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = d_\infty(f_n, f)\,.$$

Sia ora $\{x_n\}$ una successione contenuta in $[a,b]$ e convergente ad x_0 (che appartiene ad $[a,b]$); vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)\,.$$

Usando la disuguaglianza triangolare, si ha

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le |f(x_n) - f_m(x_n)| + |f_m(x_n) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)|\,,$$

da cui segue che

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le |f_m(x_n) - f_m(x_0)| + 2d_\infty(f_m, f)\,.$$

Se facciamo tendere n ad infinito, tenendo m fisso, dalla continuità di f_m (e dal teorema ponte) segue che

$$0 \le \liminf_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \le \limsup_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \le 2d_\infty(f_m, f)\,.$$

Facendo tendere m ad infinito si ottiene

$$0 \le \liminf_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \le \limsup_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \le 0\,,$$

da cui segue

$$\lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x_0)| = 0\,,$$

e dunque la continuità di f. $\square$

Definizione 1.3. *Una successione f_n di funzioni si dice* **uniformemente convergente** *ad una funzione f se*

$$\lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = 0\,.$$

Il teorema precedente può dunque essere riformulato così: "il limite uniforme di una successione di funzioni continue è continuo".

Quali altre proprietà si conservano per convergenza uniforme?

Teorema 1.4. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ uniformemente convergente ad f. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Innanzitutto, essendo f_n una successione di funzioni continue, anche f è una funzione continua, e dunque integrabile. Inoltre,

$$0 \le \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

e quindi

$$0 \le \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b d_\infty(f_n, f)\,dx = (b-a)\,d_\infty(f_n, f)\,.$$

La tesi segue allora dal fatto che $d_\infty(f_n, f)$ tende a zero e dal teorema dei carabinieri. $\square$

Osservazione 1.5. Si noti che nella dimostrazione del teorema abbiamo usato — oltre alla convergenza uniforme — anche il fatto che l'intervallo $[a,b]$ fosse limitato. Se, invece, l'intervallo non è limitato, non è più vero che in presenza di convergenza uniforme si può passare al limite sotto il segno di integrale. Per vederlo, definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } 0 \le x \le n, \\ 0 & \text{se } x > n. \end{cases}$$

Si vede facilmente che $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$, ed anche uniformemente, dato che

$$d_\infty(f_n, 0) = \sup_{x\ge 0} |f_n(x)| = \frac{1}{n}\,.$$

D'altra parte,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1\,, \qquad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0\,,$$

e quindi non c'è convergenza degli integrali.

Il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale in presenza di convergenza uniforme può essere migliorato: anche l'integrabilità secondo Riemann si conserva passando al limite uniforme.

Teorema 1.6. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili (secondo Riemann) su $[a,b]$, ed uniformemente convergente ad f. Allora f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ e si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo un lemma.

Lemma 1.7. *Siano f e g due funzioni limitate da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$. Allora, per ogni partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ si ha*

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) \le \overline{S}(g,\mathcal{P}) + (b-a)\,d_\infty(f,g)\,, \qquad \underline{S}(f,\mathcal{P}) \ge \underline{S}(g,\mathcal{P}) - (b-a)\,d_\infty(f,g)\,.$$

Dimostrazione. Per definizione di $d_\infty(f,g)$ si ha

$$g(x) - d_\infty(f,g) \le f(x) \le g(x) + d_\infty(f,g)\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,,$$

da cui segue immediatamente che, per ogni $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ si ha

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} g(x) - d_\infty(f,g) \le \inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \le \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \le \sup_{x\in[\alpha,\beta]} g(x) + d_\infty(f,g)\,.$$

Pertanto, se $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ è una partizione di $[a,b]$, si ha (ad esempio)

$$(x_{k+1}-x_k) \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) \le (x_{k+1}-x_k) \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} g(x) + (x_{k+1}-x_k)\,d_\infty(f,g)\,.$$

Sommando per k da 0 ad $n-1$ si ottiene

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) \le \overline{S}(g,\mathcal{P}) + (b-a)\,d_\infty(f,g)\,,$$

che è una metà della tesi; la disuguaglianza per le somme inferiori si dimostra analogamente. □

Dimostrazione del Teorema 1.6. Per il lemma precedente, che si può applicare perché f_n è limitata essendo integrabile, e f è limitata essendo limite uniforme di funzioni limitate, si ha, per qualsiasi partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$,

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) \le \overline{S}(f_n,\mathcal{P}) + (b-a)\,d_\infty(f_n,f)\,,$$

e

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \ge \underline{S}(f_n,\mathcal{P}) - (b-a)\,d_\infty(f_n,f)\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia n_ε in $\mathbb{N}$ tale che $n \geq n_\varepsilon$ implica $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$. In particolare, abbiamo che $d_\infty(f_{n_\varepsilon}, f) < \varepsilon$. Ora, essendo f_{n_ε} integrabile, per lo stesso $\varepsilon > 0$ fissato in precedenza esiste una partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$ di $[a, b]$ tale che

$$0 \leq \overline{S}(f_{n_\varepsilon}, \mathcal{P}_\varepsilon) - \underline{S}(f_{n_\varepsilon}, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon\,.$$

Pertanto,

$$0 \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \leq \overline{S}(f_{n_\varepsilon}, \mathcal{P}_\varepsilon) - \underline{S}(f_{n_\varepsilon}, \mathcal{P}_\varepsilon) + 2(b-a)d_\infty(f_{n_\varepsilon}, f) < C\,\varepsilon\,.$$

In sostanza, fissato $\varepsilon > 0$, abbiamo trovato una partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$ di $[a, b]$ tale che

$$0 \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < C\,\varepsilon\,,$$

e quindi f è integrabile secondo Riemann.

Una volta dimostrato che f è integrabile, il passaggio al limite sotto il segno di integrale si dimostra come nella dimostrazione del Teorema 1.4. $\square$

Una volta "sistemate" la continuità e l'integrabilità, che possiamo dire della derivabilità? In questo caso, come si vedrà, la convergenza uniforme non è sufficiente a conservarla (che non lo sia la convergenza puntuale, è evidente dato che non conserva la continuità, che è condizione necessaria per la derivabilità).

Esempio 1.8. Sia, per x in $[-1, 1]$,

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}\,.$$

Si vede facilmente che f_n è derivabile (con derivata continua), e che il limite puntuale di f_n è $f(x) = |x|$, cosicché è sufficiente dimostrare che la convergenza di f_n a f è uniforme per dimostrare che la derivabilità non si conserva. Consideriamo allora

$$f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\,,$$

che è una funzione positiva, e calcoliamone il massimo in $[-1, 1]$; dal momento che $f_n - f$ è una funzione pari, è sufficiente studiarla in $[0, 1]$; osserviamo che

$$f_n'(x) - f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - 1\,.$$

Si vede facilmente che $f_n' - f'$ è sempre negativa, e quindi la funzione $f_n - f$ è decrescente; pertanto,

$$\max_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0,1]} (f_n(x) - f(x)) = f_n(0) - f(0) = \frac{1}{n}\,,$$

e quest'ultimo risultato dimostra che la convergenza è uniforme.

Per ottenere che la funzione limite è derivabile, si devono fare delle ipotesi più forti sulla convergenza.

Teorema 1.9. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $C^1([a,b];\mathbb{R})$ tale che f_n' converge uniformemente ad una funzione g, ed esiste x_0 in $[a,b]$ tale che $f_n(x_0)$ converge ad un numero reale y_0. Allora esiste una funzione f in $C^1([a,b],\mathbb{R})$ tale che f_n converge uniformemente ad f, e si ha $f' = g$.*

Dimostrazione. Essendo f_n delle funzioni continue e derivabili con derivate continue, possiamo applicare ad ognuna di esse il teorema fondamentale del calcolo:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Siccome $f_n(x_0)$ converge ad y_0, e la convergenza delle derivate prime è uniforme, si può passare al limite nel secondo membro dell'identità precedente per dimostrare che, se definiamo

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,,$$

allora si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Osserviamo innanzitutto che, essendo per ipotesi g continua, grazie al teorema fondamentale del calcolo, f appartiene a $C^1([a,b];\mathbb{R})$ ed è tale che $f'(x) = g(x)$ per ogni x in $[a,b]$. Inoltre,

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - y_0| + \left| \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g'(t)|\,dt \right|,$$

da cui si ottiene

$$|f_n(x)-f(x)| \le |f_n(x_0)-y_0| + \left| \int_{x_0}^{x} d_\infty(f_n', g)|\,dt \right| = |f_n(x_0)-y_0| + (b-a)d_\infty(f_n', g')\,.$$

Siccome l'ultima disuguaglianza è vera per ogni x in $[a,b]$, si ha

$$d_\infty(f_n, f) \le |f_n(x_0) - y_0| + (b-a)d_\infty(f_n', g')\,,$$

da cui segue la convergenza uniforme di f_n ad f usando le ipotesi. □

Ricordando la definizione di distanza in $C^1([a,b];\mathbb{R})$:

$$d_{C^1}(f,g) = |f(x_0) - g(x_0)| + d_\infty(f', g')\,,$$

il risultato del Teorema 1.9 si può riformulare così: "se f_n è una successione di funzioni in $C^1([a,b];\mathbb{R})$ che converge ad f in d_{C^1}, allora f è in $C^1([a,b];\mathbb{R})$".

Osservazione 1.10. Anche per il Teorema 1.9, dimostrato applicando il Teorema 1.4, si è usato il fatto che l'intervallo di definizione delle f_n è limitato. Se l'intervallo non è limitato, possiamo solo concludere che $f_n(x)$ converge **puntualmente** ad $f(x)$, e che f è una funzione di classe C^1, ma non che la convergenza di f_n ad f è uniforme, fatto che in generale è falso. Ad esempio, sia g_n la successione di funzioni definita da

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{se } 2^n \leq x \leq 2^{n+1}, \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < 2^n \text{ o se } x > 2^n. \end{cases}$$

Dal momento che l'estremo superiore di g_n su $[0, +\infty)$ è 2^{-n}, g_n converge uniformemente a zero. Se definiamo

$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 2^n, \\ \frac{x-2^n}{2^n} & \text{se } 2^n \leq x \leq 2^{n+1}, \\ 1 & \text{se } x > 2^n, \end{cases}$$

abbiamo che f_n converge puntualmente a zero (che è l'integrale del limite uniforme delle g_n), ma non uniformemente dato che

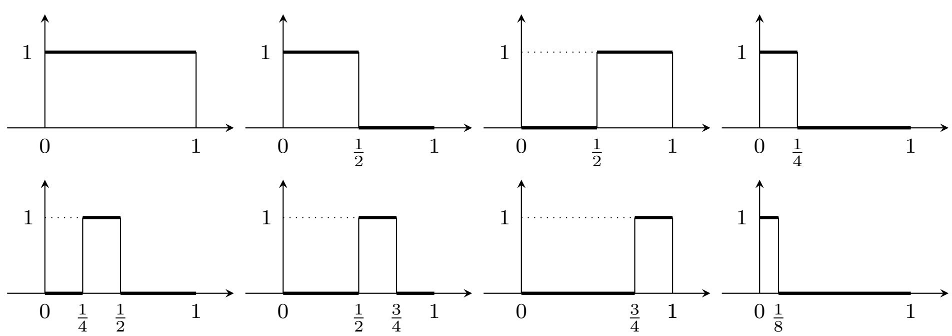
$$\sup_{x \in [0,+\infty)} |f_n(x)| = 1\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Osservazione 1.11. Come abbiamo visto, la convergenza puntuale non è sufficiente per la convergenza degli integrali. Ancora "meno sufficiente" (se possibile) è il viceversa, ovvero l'implicazione tra convergenza degli integrali e convergenza puntuale. Per vedere questo fatto, sia n in $\mathbb{N}$; allora esistono (e sono unici) m in $\mathbb{N}$ e k in $\{0, \ldots, 2^m - 1\}$ tali che

$$n = 2^m + k\,.$$

Ad esempio, $1 = 2^0 + 0$, $5 = 2^2 + 1$, $3649 = 2^{11} + 1601$, eccetera. Definiamo allora

$$f_n(x) = f_{2^m+k}(x) \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{k}{2^m} \leq x \leq \frac{k+1}{2^m}, \\ 0 & \text{altrimenti in } [0,1]. \end{cases}$$



Si vede facilmente che

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f_{2^m+k}(x)\,dx = \frac{1}{2^m}\,,$$

e siccome $m = [\log_2(n)]$ diverge quando n diverge, l'integrale di f_n tende a zero. D'altra parte, per ogni x in $[0,1]$, $f_n(x)$ assume infinite volte il valore zero, ed infinite volte il valore 1[1], e quindi non c'è convergenza puntuale in alcun punto. Si noti tuttavia che esiste almeno una sottosuccessione[2], ad esempio $\{f_{2^m}\}$, che tende a zero puntualmente in $(0,1]$.

Esercizio 1.12. Sapreste dire per quali valori di n la successione $\{f_n(1/3)\}$ dell'esempio precedente vale 1? E se x in $(0,1)$ è un punto generico?

1.1. **Quando si ha convergenza uniforme?** Abbiamo visto nel paragrafo precedente che proprietà come continuità ed integrabilità si conservano in presenza di convergenza uniforme (mentre si perdono per convergenza puntuale). Siamo in grado di dare condizioni sufficienti su una successione di funzioni affinché la convergenza sia uniforme?

Una prima condizione l'abbiamo già incontrata: se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni in $L([a,b];\mathbb{R})$ che sia di Cauchy in d_∞, allora (essendo lo spazio completo), f_n converge uniformemente ad una funzione f. Il problema con questo risultato è che la verifica della condizione di Cauchy è altrettanto ardua della verifica della convergenza uniforme (anche se prescinde dal calcolo del limite puntuale), per cui il criterio appena citato non è di facile applicazione. Un secondo criterio chiede delle ipotesi aggiuntive sulla successione di funzioni.

Teorema 1.13 (Piccolo teorema del Dini)**.** *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ tale che*

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in [a,b]\,.$$

Supponiamo inoltre che sia continua la funzione

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,, \qquad \forall x \in [a,b]$$

(si noti che il limite esiste perché la successione $\{f_n(x)\}$ è monotona crescente). Allora f_n converge uniformemente ad f. Analogo risultato vale se la successione f_n è monotona decrescente.

---

(1) Ad esempio, $f_n(0) = \{1,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,\ldots\}$.

(2) In realtà parecchie. . .

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f_n non converga uniformemente ad f, ovvero che $d_\infty(f_n, f)$ non tenda a zero quando n diverge. Pertanto, esiste $\overline{\varepsilon} > 0$ tale che la disuguaglianza $d_\infty(f_n, f) \leq \overline{\varepsilon}$ non è verificata definitivamente, ovvero, esiste $\overline{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni k fissato in $\mathbb{N}$ esistono infiniti indici naturali h, maggiori di k, per i quali si abbia $d_\infty(f_h, f) \geq \overline{\varepsilon}$; in particolare, per ogni k in $\mathbb{N}$ esiste almeno un numero naturale $h = h(k) > k$ tale che $d_\infty(f_{h(k)}, f) \geq \overline{\varepsilon}$. Per definizione di d_∞, possiamo allora dire che esiste $\overline{\varepsilon} > 0$ tale che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists h(k) > k\,,\ \exists x_k \in [a, b] : |f_{h(k)}(x_k) - f(x_k)| \geq \overline{\varepsilon}\,.$$

Ricordando che $f \geq f_n$ per ogni n, possiamo riscrivere l'affermazione precedente dicendo che esiste $\overline{\varepsilon} > 0$ tale che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists h(k) > k\,,\ \exists x_k \in [a, b] : f(x_k) - f_{h(k)}(x_k) \geq \overline{\varepsilon}\,.$$

Dal momento che la successione $\{f_n\}$ è monotona crescente, si ha $f_{h(k)}(x_k) \geq f_j(x_k)$ per ogni $j \leq h(k)$, cosicché esiste $\overline{\varepsilon} > 0$ tale che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists h(k) > k\,,\ \exists x_k \in [a, b] : f(x_k) - f_j(x_k) \geq \overline{\varepsilon}\,, \quad \forall j \leq h(k)\,.$$

Osserviamo ora che $\{x_k\}$ è contenuta nell'insieme compatto $[a, b]$, e quindi (per Bolzano-Weierstrass) ammette una sottosuccessione $\{x_{k_i}\}$ convergente ad x_0 in $[a, b]$. Dal momento che si ha

$$f(x_{k_i}) - f_j(x_{k_i}) \geq \overline{\varepsilon}\,, \qquad \forall j \leq h(k_i)\,,$$

passando al limite su i, usando la continuità sia di f che di f_j, e osservando che $h(k_i)$ diverge, abbiamo

$$f(x_0) - f_j(x_0) \geq \overline{\varepsilon}\,, \qquad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

Facendo tendere j ad infinito, si ottiene l'assurdo:

$$0 = f(x_0) - f(x_0) \geq \overline{\varepsilon}\,,$$

e quindi la tesi. □

Analogo risultato vale se alla convergenza "monotona" della successione f_n sostituiamo la monotonia della funzione f_n, per ogni n.

Teorema 1.14. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite su $[a, b]$ e crescenti. Supponiamo che f_n converga puntualmente ad una funzione f, continua su $[a, b]$. Allora la convergenza di f_n a f è uniforme. Analogo risultato vale se le funzioni sono monotone decrescenti.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta_\varepsilon > 0$ il valore dato dall'essere f uniformemente continua; sia poi h in $\mathbb{N}$, con $h > (b - a)/\delta_\varepsilon$, e consideriamo una partizione di $[a, b]$ in h parti uguali:

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{h-1} < x_h = b\,, \qquad x_j = a + \frac{b - a}{h}\, j\,.$$

Essendo f uniformemente continua, e siccome l'ampiezza degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$ è minore di δ_ε per costruzione, si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall x, y \in [x_{j-1}, x_j]\,,\ \forall j = 1, \ldots, h - 1\,.$$

Dal momento che $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ per ogni x, esiste $\overline{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \overline{n} \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x_j) - f(x_j)| \leq \varepsilon\,, \quad \forall j = 1, \ldots, h-1\,.$$

Sia ora j fissato e x in $[x_{j-1}, x_j]$; dal momento che le f_n sono monotone crescenti, si ha

$$f_n(x_{j-1}) \leq f_n(x) \leq f_n(x_j)\,, \qquad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]\,,$$

da cui segue, osservando che anche f è crescente,

$$f_n(x_{j-1}) - f(x_j) \leq f_n(x_{j-1}) - f(x) \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_j) - f(x) \leq f_n(x_j) - f_n(x_{j-1})\,,$$

per ogni x in $[x_{j-1}, x_j]$. Da queste disuguaglianze segue allora

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \varepsilon\,, \quad \forall n \geq \overline{n}\,,\ \forall x \in [x_{j-1}, x_j]\,,$$

cosicché

$$\sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq \overline{n}\,,$$

e la disuguaglianza precedente vale per ogni j tra 1 e $h-1$. Ma allora, per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{1 \leq j \leq h-1} \Big(\sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |f_n(x) - f(x)| \Big) \leq \varepsilon\,,$$

da cui segue la tesi. $\square$

Esempio 1.15. La successione $f_n(x) = x^n$ definita su $[0,1]$ non soddisfa né le ipotesi del Teorema 1.13, né le ipotesi del Teorema 1.14. Infatti, pur se è vero che la successione f_n decresce al suo limite puntuale, ed è fatta di funzioni monotone crescenti, il limite puntuale non è continuo (e dunque nessuno dei due teoremi si può applicare). Se "restringiamo" l'intervallo passando a $[0,1)$, il limite è la funzione nulla (che è continua), ma nessuno dei due teoremi si può applicare perché l'intervallo di definizione non è più un compatto. Se, invece, restringiamo ulteriormente l'intervallo considerando $[0,a]$ con $a < 1$, entrambi i teoremi si applicano (ed infatti la convergenza è uniforme, come si verifica facilmente "a mano").

Un ulteriore risultato sulla convergenza uniforme — o meglio sull'esistenza di una sottosuccessione uniformemente convergente — verrà enunciato (ed anche dimostrato...) più avanti, quando si affronterà il problema della caratterizzazione degli insiemi a chiusura compatta in $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

1.2. **Quando non si ha convergenza uniforme?** Alle volte può essere utile dimostrare (senza fare troppi calcoli) che una successione di funzioni converge puntualmente ma non uniformemente. Ovviamente, se le f_n sono continue ed il limite puntuale non lo è, la convergenza non può essere uniforme, ma cosa si può dire se, invece, il limite puntuale è continuo? In questi casi, torna utile (una conseguenza de) il seguente risultato.

Teorema 1.16. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue su $[a,b]$, uniformemente convergente ad una funzione f, e sia $\{x_n\}$ una successione convergente ad x_0 in $[a,b]$. Allora*
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x_0)\,.$$

Dimostrazione. Grazie alla disuguaglianza triangolare si ha
$$|f_n(x_n)-f(x_0)| \le |f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)| \le d_\infty(f_n,f)+|f(x_n)-f(x_0)|\,.$$
Dal momento che f_n converge uniformemente a f, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_{\varepsilon,1}$ in $\mathbb{N}$ tale che $n \ge n_{\varepsilon,1}$ implica $d_\infty(f_n,f) \le \varepsilon$. D'altra parte, essendo f continua (come limite uniforme di funzioni continue), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_{\varepsilon,2}$ in $\mathbb{N}$ tale che $n \ge n_{\varepsilon,2}$ implica $|f(x_n) - f(x_0)| \le \varepsilon$. Pertanto, se $n \ge \max(n_{\varepsilon,1}, n_{\varepsilon,2})$ si ha
$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \le 2\varepsilon\,,$$
il che dimostra che $\{f_n(x_n)\}$ tende a $f(x_0)$. □

Si può allora ottenere un "criterio di non convergenza uniforme": se si riesce a trovare una successione $\{x_n\}$ convergente ad x_0, e tale che $f_n(x_n)$ non converge a $f(x_0)$, allora la convergenza di f_n a f non è uniforme. Ad esempio, la successione
$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}\,,$$
che converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$ in $[0,1]$, non vi converge uniformemente dato che
$$\lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \ne 0 = f(0)\,.$$

1.3. **Serie di funzioni.** Un caso particolare di successioni di funzioni di cui considerare la convergenza, è quello delle **serie di funzioni**. Data una successione $\{f_n\}$ di funzioni definite su un insieme A, consideriamo la successione di funzioni ("somme parziali")
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,, \qquad x \in A\,.$$
Diremo, in analogia a quanto detto precedentemente, che la serie **converge puntualmente** se esiste una funzione $S(x)$ tale che S_n converge puntualmente ad S, e che la serie **converge uniformemente** se la convergenza di S_n ad S è uniforme. Dai risultati dimostrati in precedenza, discende il seguente teorema.

Teorema 1.17. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ tale che S_n converge uniformemente ad S; allora S è continua; se $\{f_n\}$ è una successione di* *funzioni integrabili secondo Riemann su $[a,b]$ la cui serie converge uniformemente ad una funzione S, allora S è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ e si ha*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx\,,$$

ovvero possiamo scambiare l'operazione di integrale con quella di serie. Infine, se le funzioni f_n appartengono a $C^1([a,b];\mathbb{R})$, esiste x_0 in $[a,b]$ tale che la serie di termine generico $f_n(x_0)$ converge, e la serie delle derivate prime converge uniformemente, allora la serie di termine generico f_n converge uniformemente, la somma $S(x)$ della serie è derivabile, e la derivata di $S(x)$ è la somma della serie delle derivate.

Si noti che se $f_n(x) \geq 0$ per ogni n in $\mathbb{N}$ e per ogni x in $[a,b]$, allora la successione delle somme parziali converge crescendo a $S(x)$; pertanto, se $S(x)$ è una funzione continua, la convergenza di S_n a S è uniforme grazie al piccolo teorema del Dini.

Il problema della convergenza uniforme per una serie di funzioni consiste essenzialmente nel fatto che — a meno di casi eccezionali — non è possibile calcolare esplicitamente la somma $S(x)$ della serie, cosicché la definizione di convergenza uniforme è poco "maneggevole". È vero che, usando la completezza dello spazio $C^0([a,b];\mathbb{R})$, è sufficiente dimostrare che la successione S_n è di Cauchy per dimostrare che è uniformemente convergente, ma in ogni caso sarebbe comoda una definzione di convergenza per serie di funzioni che sia più facile da verificare da un lato, è implichi la convergenza uniforme dall'altro.

Definizione 1.18. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L([a,b];\mathbb{R})$. La serie di funzioni di termine generico f_n si dice **totalmente convergente** se si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x)| = M < +\infty\,.$$

Teorema 1.19. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L([a,b];\mathbb{R})$ la cui serie converga totalmente. Allora la serie converge uniformemente.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che la serie converge puntualmente, dimostrando che, per ogni x in $[a,b]$, la serie di termine generico $f_k(x)$ converge assolutamente. Infatti, dal momento che si ha

$$|f_k(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x)|\,,$$

il risultato segue dal criterio del confronto per serie a termini positivi. Possiamo allora definire

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\,, \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Essendo

$$|S(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x)| = M < +\infty\,,$$

abbiamo che S è limitata su $[a,b]$ e dunque appartiene a $L([a,b];\mathbb{R})$. Ha dunque senso calcolare

$$d_\infty(S_n, S) = \sup_{x\in[a,b]} \Big| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \Big| = \sup_{x\in[a,b]} \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \Big|\,.$$

Ora, per ogni x in $[a,b]$ si ha

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x)|\,,$$

e quindi

$$\sup_{x\in[a,b]} \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x)|\,.$$

Il termine a destra della disuguaglianza è infinitesimo per n tendente ad infinito, essendo la serie resto di una serie convergente. Pertanto, anche il termine a sinistra nella disuguaglianza tende a zero (essendo positivo). Ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} d_\infty(S_n, S) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \Big| = 0\,,$$

come volevasi dimostrare. □

Osservazione 1.20. Sia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successione di funzioni definite su $[a,b]$; poniamo $f_0(x) \equiv 0$ e

$$g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Allora

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\,,$$

cosicché la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}$ può essere ottenuta tramite la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni di termine generico g_k. Ricordando che per la convergenza delle serie di funzioni abbiamo a disposizione un criterio in più, la convergenza totale, possiamo dedurre la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ dalla convergenza totale della serie delle g_k. Pertanto,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big[\sup_{x\in[a,b]}|g_k(x)|\Big]=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big[\sup_{x\in[a,b]}|f_k(x)-f_{k-1}(x)|\Big]<+\infty$$
$$\Longrightarrow$$
$$f_n \text{ converge uniformemente.}$$

Non sempre, però, le serie convergono totalmente, e il riuscire a dimostrare la convergenza uniforme può essere l'ultima "speranza" per ottenere informazioni sulla funzione limite. Se la serie è a segni alterni, abbiamo il seguente criterio.

Teorema 1.21. *Sia $f_k(x)$ una successione decrescente di funzioni non negative convergente uniformemente a zero:*

$$0\le f_{k+1}(x)\le f_k(x)\,,\ \forall k\in\mathbb{N}\,,\qquad \lim_{k\to+\infty}\sup_{x\in[a,b]}f_k(x)=0\,.$$

Allora la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k f_k(x)\,,\quad \textit{converge uniformemente in } [a,b].$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per ogni x fissato, esiste

$$S(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k f_k(x)<+\infty\,,$$

dato che si può applicare il criterio di Leibniz alla serie di termine generico $(-1)^k f_k(x)$. Ripetendo la stessa dimostrazione del criterio di Leibniz (si veda più avanti), si dimostra che

$$S_1(x)\le S_3(x)\le\ldots S_{2m+1}(x)\le S_{2m}(x)\le\ldots\le S_4(x)\le S_2(x)\,,\quad \forall x\in[a,b]\,,$$

cosicché

$$S_{2m+1}(x)\le S(x)\le S_{2m}(x)\,,\qquad \forall m\in\mathbb{N}\,,\ \forall x\in[a,b]\,.$$

Ma allora

$$|S_n(x)-S(x)|\le|S_{n+1}(x)-S_n(x)|=f_{n+1}(x)\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}\,,\ \forall x\in[a,b]\,,$$

da cui segue

$$0\le\sup_{x\in[a,b]}|S_n(x)-S(x)|\le\sup_{x\in[a,b]}f_{n+1}(x)\,,$$

e la quantità a destra tende a zero per ipotesi. □

Esempio 1.22. Consideriamo, come applicazione del teorema precedente, la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1}\,,\qquad x\in[-1,0]\,.$$

Apparentemente, la serie non è a segni alterni; se, però, definiamo $x = -y$, con y in $[0,1]$, otteniamo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{y^k}{k+1}\,, \qquad y \in [0,1]\,,$$

che è a segni alterni, con $f_k(y) = \frac{y^k}{k+1}$. Dal momento che si ha, per y in $[0,1]$, $y^{k+1} \leq y^k$, chiaramente $0 \leq f_{k+1}(y) \leq f_k(y)$. D'altro canto,

$$\sup_{y\in[0,1]} f_k(y) = \max_{y\in[0,1]} \frac{y^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}\,,$$

che tende a zero quando k diverge. Per il teorema precedente, la serie di funzioni di termine generico $f_k(x)$ converge uniformemente in $[0,1]$, e quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}\,, \qquad \text{converge uniformemente in } [-1,0].$$

Notiamo che, essendo

$$\frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x t^k \, dt\,,$$

dai teoremi di integrazione per serie[3] abbiamo che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x)\,,$$

da cui segue

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\frac{\log(1-x)}{x}\,, \qquad \forall x \in [-1,0]\,,$$

e quindi, in particolare,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \log(2)\,.$$

2. Serie di potenze

Un caso molto particolare di serie di funzioni è quello delle cosiddette **serie di potenze**:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,(x-x_0)^k\,,$$

con x_0 in $\mathbb{R}$ fissato, il cui insieme dei valori x di convergenza, divergenza o non convergenza dipende dalla successione a_k che le definisce. In quanto segue, sarà

[3] Perché possiamo applicarli?

sempre $x_0 = 0$ dato che, a partire da una serie di potenze come sopra, ci si può sempre ricondurre, ponendo $y = x - x_0$, alla serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, y^k \, .$$

Esempio 2.1. Consideriamo le tre successioni $a_k = \frac{1}{k!}$, $b_k = 1$ e $c_k = k!$; in corrispondenza alle tre successioni otteniamo le tre serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \, , \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \, , \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k! \, x^k \, ,$$

che si vede facilmente essere convergenti su tutto $\mathbb{R}$, in $(-1, 1)$ e solo nell'origine, rispettivamente.

Data una successione $\{a_k\}$ di coefficienti, supponiamo di aver determinato

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, x^k \text{ è convergente}\} \, .$$

Possiamo allora definire $f : E \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, x^k \, , \qquad \forall x \in E \, .$$

Nei primi due casi dell'esempio precedente, abbiamo $E = \mathbb{R}$ e $f(x) = \mathrm{e}^x$ per la prima serie, ed $E = (-1, 1)$, con $f(x) = \frac{1}{1-x}$, per la seconda (avendo usato la definizione di esponenziale, e le proprietà delle serie geometriche).

Esempio 2.2. Consideriamo ora la seguente successione di coefficienti:

$$a_k = \begin{cases} (-1)^h & \text{se } k = 2h \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Scrivendo la serie di potenze di coefficienti a_k si ha, grazie alla definizione,

$$\sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \, x^{2h} = \sum_{h=0}^{+\infty} (-x^2)^h \, .$$

Ricordando le proprietà delle serie geometriche, si ha

$$|x| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{h=0}^{+\infty} (-x^2)^h = \frac{1}{1 + x^2} \, ,$$

dove l'ultima uguaglianza indica che la serie converge, e che la sua somma è la funzione $\frac{1}{1+x^2}$. La cosa "strana" che si nota da questa identità è che la serie converge solo per $|x| < 1$, mentre la funzione limite $\frac{1}{1+x^2}$ è non solo definita, ma anche limitata, su tutto $\mathbb{R}$ (si noti che nel caso della somma della serie geometrica la funzione limite $\frac{1}{1-x}$ non né definita, né limitata su $\mathbb{R}$). È naturale allora chiedersi come mai accada un fenomeno del genere, e perché l'identità valga solo per $|x| < 1$, e per nessun x tale che $|x| \geq 1$ (è facile vedere che la serie o diverge o non converge per $|x| \geq 1$).

Sfortunatamente, rimanendo nell'ambito dei numeri reali non si riesce a capire la motivazione (profonda) di questo fatto. Se, però, invece di considerare valori x reali, consideriamo valori z complessi, ovvero studiamo la serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{h=0}^{+\infty} (-z^2)^h\,,$$

l'arcano si chiarisce. È infatti facile dimostrare che se $|z| < 1$ allora la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente, ed inoltre che si ha

$$|z| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{h=0}^{+\infty} (-z^2)^h = \frac{1}{1+z^2}\,.$$

Ed ecco svelato il mistero: mentre la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è limitata e definita su tutto $\mathbb{R}$, la funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ non è né definita, né limitata su $\mathbb{C}$; infatti, il denominatore si annulla per $z = \pm i$, e la frazione non è più definita. In altre parole: se vediamo la serie di potenze in campo reale come "traccia" della serie di potenze in campo complesso, ci rendiamo conto che oltre $(-1, 1)$ "non possiamo andare" perché, in qualche modo, le operazioni di sommatoria (ovvero, di limite) risentono della presenza dei valori $\pm i$ nei quali né la serie converge, né è definita la funzione limite.

In altre parole, l'ambiente naturale per lo studio delle serie di potenze non è $\mathbb{R}$, ma $\mathbb{C}$[(4)], cosicché da ora in poi (e fino ad avviso contrario) i coefficienti della serie ora saranno numeri complessi.

Rimane, dall'esempio precedente, un dubbio: per quale motivo l'essere la serie non convergente per $z = \pm i$ "implica" che la serie non converge per (ad esempio) ± 1, o per qualsiasi x tale che $|x| > 1$? La spiegazione di questo fatto è data nel seguente teorema.

Teorema 2.3. *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri complessi, e sia z_0 in $\mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, tale che*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z_0^k \qquad \textit{converge.}$$

---

(4) $\mathbb{C}$, dove c'è più spazio!

Allora la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k \qquad \textit{converge totalmente in } B_R(0) \textit{ per ogni } R < |z_0|,$$

e dunque converge assolutamente in z*, per ogni* z *tale che* $|z| < |z_0|$*.*

Dimostrazione. Dal momento che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z_0^k \qquad \text{converge,}$$

per la condizione necessaria di convergenza si ha

$$\lim_{k\to+\infty} a_k\, z_0^k = 0\,,$$

il che implica che

$$\lim_{k\to+\infty} |a_k|\,|z_0|^k = 0\,.$$

Pertanto, esiste k_0 in $\mathbb{N}$ tale che

$$k \geq k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |a_k|\,|z_0|^k \leq 1\,.$$

Sia ora z in $B_R(0)$, con $R < |z_0|$, e sia $k \geq k_0$: allora

$$|a_k|\,|z|^k \leq |a_k|\,|z_0|^k \left|\frac{z}{z_0}\right|^k \leq \left(\frac{R}{|z_0|}\right)^k,$$

e quindi

$$\sup_{z\in B_R(0)} |a_k\, z^k| \leq \left(\frac{R}{|z_0|}\right)^k.$$

Essendo $R < |z_0|$, si ha $R/|z_0| < 1$, e quindi l'ultimo termine a destra nella disuguaglianza precedente è il termine generico di una serie geometrica (reale) convergente. Per il criterio del confronto, la serie di termine generico $\{\sup |a_k\, z^k|\}$ è dunque convergente, e pertanto la serie di termine generico $a_k\, z^k$ è totalmente convergente, come volevasi dimostrare. La convergenza assoluta (dunque puntuale) segue poi dalla convergenza totale. $\square$

Il teorema precedente motiva la seguente definizione.

Definizione 2.4. Sia data una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k\,.$$

Definiamo il **raggio di convergenza** della serie di potenze come

$$\rho = \sup \left\{ |z|\,,\ z \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k \text{ converge} \right\}.$$

La definizione di “raggio” è motivata dal seguente risultato.

Teorema 2.5. *Una serie di potenze ha raggio di convergenza uguale a ρ, con $0 < \rho < +\infty$, se e solo se la serie converge per $|z| < \rho$, e non converge per $|z| > \rho$.*

Dimostrazione. Sia ρ in $(0, +\infty)$ il raggio di convergenza della serie di potenze (come definito precedentemente), e dimostriamo che la serie converge se $|z| < \rho$; infatti, fissato $|z| < \rho$, esiste (per le proprietà dell'estremo superiore) un numero complesso z_0 tale che $|z| < |z_0| \leq \rho$, e tale che la serie converga in z_0; per il Teorema 2.3, la serie di potenze converge puntualmente in z. Sia ora z_0 tale che $|z_0| > \rho$. Per definizione di estremo superiore (uguale a ρ), la serie non può convergere in z_0: se lo facesse, l'estremo superiore dell'insieme di convergenza sarebbe strettamente maggiore di ρ (cosa che non è).

Viceversa, supponiamo che la serie converga se $|z| < \rho_1$, e non converga se $|z| > \rho_1$. Dalla prima informazione otteniamo che $\rho_1 \leq \rho$, mentre dalla seconda segue che $\rho_1 \geq \rho$; se — infatti — fosse $\rho_1 < \rho$, allora esisterebbe z_0, con $\rho_1 < |z_0| \leq \rho$, tale che la serie converge in z_0, contraddicendo così la non convergenza per $|z| > \rho_1$. Abbiamo così dimostrato che $\rho_1 = \rho$, e dunque la seconda parte del teorema. □

Come converge una serie di potenze “all'interno del raggio di convergenza”?

Teorema 2.6. *Data una serie di potenze, sia $\rho > 0$ il raggio di convergenza. Allora la serie di potenze converge totalmente in $B_r(0)$, per ogni $r < \rho$.*

Dimostrazione. Per definizione di ρ (come estremo superiore), per ogni $r < \rho$ esiste z_0 tale che la serie converge in z_0, e si ha $r < |z_0| \leq \rho$. Per il Teorema 2.3, si ha allora convergenza totale in $B_R(0)$, per ogni $R < |z_0|$, e dunque, in particolare, in $B_r(0)$. □

Il prossimo teorema permette di calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Teorema 2.7. *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri complessi, e si definiscano*

$$L = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,, \qquad \rho = \begin{cases} 0 & \textit{se } L = +\infty, \\ \frac{1}{L} & \textit{se } 0 < L < +\infty, \\ +\infty & \textit{se } L = 0. \end{cases}$$

Allora ρ è il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $0 < \rho < +\infty$, e sia z tale che $|z| < \rho$; allora, come nella dimostrazione del Teorema 2.3, abbiamo

$$|a_k\, z^k| = |a_k|\, |z|^k\,.$$

Dal momento che

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|z|^k} = L\,|z| = \frac{|z|}{\rho} < 1\,,$$

la serie di potenze converge assolutamente (e dunque semplicemente) per il criterio della radice, come volevasi dimostrare. Se, invece, $|z| > \rho$, allora

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|z|^k} = L\,|z| = \frac{|z|}{\rho} > 1\,,$$

e quindi la serie diverge assolutamente per il criterio della radice. Pertanto, ρ è il raggio di convergenza della serie di potenze.

Se $\rho = 0$ (e quindi $L = +\infty$) allora, per $|z| > 0$ si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|z|^k} = +\infty\,,$$

cosicché la serie diverge assolutamente per il criterio della radice; se, infine, ρ è infinito (che implica $L = 0$), allora

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|z|^k} = 0\,,$$

per ogni z in $\mathbb{C}$, e quindi la serie di potenze converge assolutamente per ogni z complesso. $\square$

Sia ora data una serie di potenze a coefficienti **reali**, e sia $\rho > 0$ il suo raggio di convergenza. Possiamo allora definire una funzione reale di variabile reale $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k\,.$$

Che proprietà ha la funzione f? Dal fatto che la convergenza della serie è totale (dunque uniforme) in ogni sottointervallo $[-r, r] \subset (-\rho, \rho)$, sappiamo già che f è continua in $-(\rho, \rho)$ (si noti che ogni somma parziale è continua essendo un polinomio). Possiamo dire di più?

Teorema 2.8. *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri reali, e sia $\rho > 0$ il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k\,.$$

Allora ρ è anche il raggio di convergenza della serie delle derivate (che è una serie di potenze essa stessa):

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|k\, a_k|} = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,,$$

dato che

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1\,,$$

e concludere usando il Teorema 2.7. □

Come conseguenza del teorema precedente, dei teoremi sulla convergenza della serie delle derivate, e dei teoremi sulla convergenza delle serie di potenze, abbiamo dunque che f appartiene a $C^1((-\rho,\rho);\mathbb{R})$. Osserviamo ora che possiamo riapplicare lo stesso teorema alla serie delle derivate, e poi alla serie delle derivate seconde, e così via. In sostanza, se f è la funzione data dalla somma di una serie di potenze di raggio di convergenza $\rho > 0$, allora f è derivabile **infinite** volte con continuità.

Se, invece di derivare, integriamo, possiamo scambiare serie ed integrale grazie alla convergenza uniforme.

Teorema 2.9. *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri reali, e sia $\rho > 0$ il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k\,.$$

Allora per ogni $-\rho < \alpha < \beta < \rho$ si ha

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k\Big)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_\alpha^\beta x^k\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}[\beta^k - \alpha^k]\,,$$

e la serie di potenze degli integrali,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}\,,$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

Osservazione 2.10. I teoremi precedenti valgono anche in ambito complesso; il concetto di derivata di una funzione complessa (per non parlare di quello di integrale, che è radicalmente differente) esula però dagli argomenti di questo corso, e quindi il risultato è stato dimostrato solo in ambito reale.

In sostanza, quindi, una volta assegnata una successione $\{a_k\}$ di numeri complessi, l'insieme di convergenza della serie di potenze è quasi completamente identificato dal raggio di convergenza; l'unica "incognita" sulla convergenza riguarda l'insieme $\{|z| = \rho\}$ (chiaramente, deve essere $0 < \rho < +\infty$). Come vedremo, su tale insieme può succedere che la serie converga sempre, o mai, o solo in alcuni punti.

Esempio 2.11. Consideriamo le tre serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k+1}\,, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)^2}\,, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k\, z^k\,.$$

Per tutte e tre il raggio di convergenza è $\rho = 1$; se $|z| = 1$, la seconda serie converge (perché converge assolutamente) e la terza non converge (dato che non soddisfa la condizione necessaria di convergenza). La prima, invece, converge ad esempio per $z = -1$ e diverge per $z = 1$.

Esercizio 2.12. Esistono altri numeri complessi di modulo 1 (a parte $z = -1$) tali che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k+1} \quad \text{è convergente?}$$

Se, invece di considerare serie di potenze complesse, consideriamo serie di potenze reali, si può concludere qualcosa su come converge una serie di potenze sul bordo.

Teorema 2.13 (Abel)**.** *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri reali, e sia $0 < \rho < +\infty$ il raggio di convergenza della serie di potenze corrispondente. Se la serie di potenze converge per $x = \rho$, allora la convergenza è uniforme in $[-r, \rho]$ per ogni $0 < r < \rho$ (ed analogamente se la serie converge in $x = -\rho$).*

Esempio 2.14. Ad esempio, se $a_k = 1/(k+1)$ per ogni k, la serie di potenze è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2}\,,$$

che ha come raggio di convergenza $\rho = 1$ e converge per $x = \pm 1$ (come si verifica facilmente), cosicché la convergenza è uniforme in $[-1, 1]$. Osservando che

$$\frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{x} \int t^k\, dt\,,$$

abbiamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x} \int t^k\, dt = \frac{1}{x} \int \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\, dt = \frac{1}{x} \int \frac{dt}{1-t} = -\frac{\log(1-x)}{x}\,,$$

e, integrando nuovamente,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2} = -\frac{1}{x} \int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\, dt\,.$$

Sostituendo $x = 1$ (che è lecito!), si ottiene

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = -\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}\, dt\,.$$

2.1. **Esponenziale, seno e coseno.** Torniamo al campo complesso, e definiamo

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\,.$$

Si vede facilmente che il raggio di convergenza è $\rho = +\infty$, e dunque che la serie converge (totalmente, uniformemente e puntualmente) su ogni compatto $K \subset \mathbb{C}$[5]. Dimostriamo che, per ogni z e w in $\mathbb{C}$, si ha

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\, \mathrm{e}^w\,,$$

fatto che giustifica la definizione di "esponenziale" per la somma della serie. Si ha, infatti, per la formula del binomio di Newton,

$$\mathrm{e}^{z+w} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} z^h\, w^{k-h} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^{k} \frac{k!}{k!}\, \frac{z^h\, w^{k-h}}{h!\,(k-h)!}\,,$$

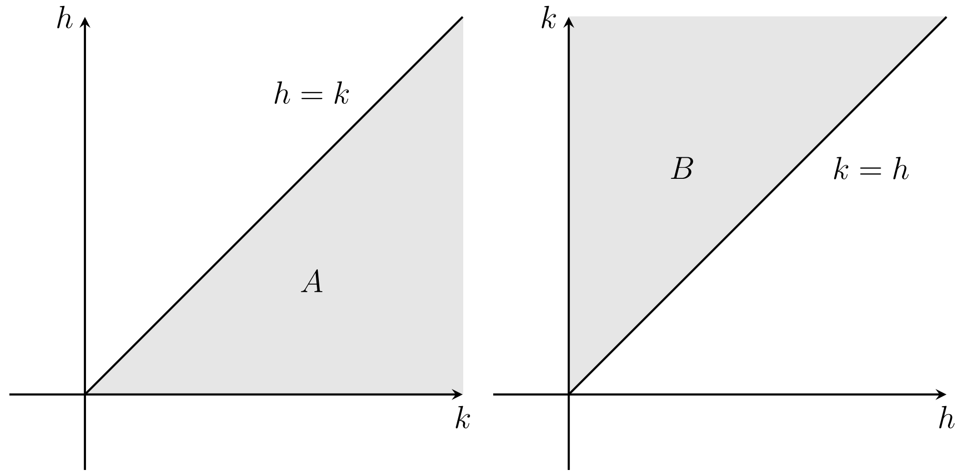
ovvero

$$\mathrm{e}^{z+w} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^{k} \frac{z^h\, w^{k-h}}{h!\,(k-h)!}\,.$$

[5] Ricordiamo che i compatti di $\mathbb{C}$ sono i compatti di $\mathbb{R}^2$ — o meglio di $(\mathbb{R}^2, d_2)$ — per l'identificazione "naturale" tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$ data da $z = x + i\,y \mapsto (x, y)$.

Scambiamo ora l'ordine della sommatoria, ed osserviamo che

$$A = \{(k,h) \in \mathbb{N}^2 : k \geq 0\,,\ 0 \leq h \leq k\} = \{(h,k) \in \mathbb{N}^2 : h \geq 0\,, k \geq h\} = B\,.$$



Allora,

$$e^{z+w} = \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{z^h\, w^{k-h}}{h!\,(k-h)!} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{z^h}{h!} \left(\sum_{k=h}^{+\infty} \frac{w^{k-h}}{(k-h)!} \right).$$

Ora, però, si ha, ponendo $k - h = j$,

$$\sum_{k=h}^{+\infty} \frac{w^{k-h}}{(k-h)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!} = e^w\,,$$

e quindi

$$e^{z+w} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{z^h}{h!}\, e^w = e^w \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{z^h}{h!} = e^w\, e^z\,,$$

come volevasi dimostrare.

Se $z = x$ appartiene ad $\mathbb{R}$, ritroviamo la serie di Taylor dell'esponenziale:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Se, invece, poniamo $z = i\,x$, con x reale, allora troviamo

$$e^{i\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!}\,.$$

Osservando che si ha $i^{2k} = (-1)^k$, e $i^{2k+1} = (-1)^k\, i$, si ha la cosiddetta **formula di Eulero**:

$$e^{i\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(x) + i\ \mathrm{sen}(x)\,.$$

Scegliendo $x = 2\pi$, si ha dunque $e^{2\pi\, i} = 1$, e quindi, per ogni z complesso,

$$e^{z+2\pi\, i} = e^{z}\,,$$

da cui segue che la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi\, i$. La formula di Eulero, scritta per $x = z$ **complesso**, diventa

$$e^{i\,z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Definendo (si noti che le serie convergono su tutto il piano complesso)

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad \mathrm{sen}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

abbiamo

$$e^{i\,z} = \cos(z) + i\ \mathrm{sen}(z)\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,,$$

ed inoltre

$$\cos(z) = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}\,, \qquad \mathrm{sen}(z) = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}\,,$$

formule che (se $z = x$ è reale) permettono di ottenere le funzioni trigonometriche seno e coseno dalla funzione esponenziale complessa:

$$\cos(x) = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\,, \qquad \mathrm{sen}(x) = \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2i}\,.$$

Si noti che

$$\cos(2k\pi\, i) = \frac{e^{-2k\pi} + e^{2k\pi}}{2}\,,$$

e quindi, a differenza di quanto accade in campo reale,

$$\lim_{k\to+\infty} \cos(2k\pi\, i) = +\infty\,.$$

Se ne deduce, in particolare, che la funzione “coseno” (e — analogamente — la funzione “seno”) **non** è limitata in campo complesso. Questo è un caso particolare di un importante teorema, dovuto a Liouville, che afferma che ogni funzione f, derivabile in campo complesso[(6)] e limitata, è costante[(7)]. Si noti che tale teorema

[(6)]Qualsiasi cosa significhi, ma sappiate che la funzione “coseno” lo è!

[(7)]E, quindi, non sono tante le funzioni derivabili e limitate!

in $\mathbb{R}$ è falso: la funzione $\operatorname{arc\,tg}(x)$ è limitata, derivabile, ma non costante, così come non lo è la funzione

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} .$$

Che quest'ultima "non sia limitata" si vede immediatamente passando ai complessi: la funzione

$$\mathrm{e}^{-z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{k!} ,$$

non è limitata, dato che $\mathrm{e}^{-(ix)^2} = \mathrm{e}^{x^2}$ diverge quando x diverge.

Osservazione 2.15. Perché mai una funzione "derivabile" in campo complesso e limitata deve essere costante? Invece di considerare una funzione derivabile (che non sappiamo cosa sia), consideriamo una funzione complessa definita da una serie di potenze che converge ovunque in $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k .$$

Consideriamo ora la funzione $g(z) = f(z)/z$, ed andiamo a considerare tale funzione "ristretta" alla circonferenza di raggio R e centro l'origine, che può essere parametrizzata come $z = R\,\mathrm{e}^{i\theta}$, θ in $[0, 2\pi]$. Abbiamo così

$$g(R\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, (R\,\mathrm{e}^{i\theta})^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, R^{k-1}\, [\cos((k-1)\theta) + i\, \mathrm{sen}((k-1)\theta)] .$$

Siccome la serie converge uniformemente su tutti i compatti di $\mathbb{C}$ (avendo raggio di convergenza più infinito) possiamo scambiare serie ed integrale(8):

$$\int_0^{2\pi} g(R\mathrm{e}^{i\theta})\, d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, R^{k-1} \Big[\int_0^{2\pi} \cos((k-1)\theta)\, d\theta + i \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}((k-1)\theta)\, d\theta \Big] .$$

Ora, se $k \neq 1$, i due integrali nella sommatoria sono nulli, mentre se $k = 1$ l'integrale del coseno vale 2π, e quello del seno vale 0; pertanto,

$$\int_0^{2\pi} g(R\,\mathrm{e}^{i\theta})\, d\theta = 2\pi\, a_1 ,$$

e il primo membro della precedente identità non dipende da R. Ricordiamo ora che $g(z) = f(z)/z$; pertanto, se $|z| = R$, si ha, essendo f limitata,

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{M}{R} ,$$

(8)L'integrale al primo membro va pensato come integrale della parte reale più i volte l'integrale della parte immaginaria.

il che implica che

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{|z|=R} |g(z)| = 0\,,$$

ovvero che g, ristretta a $|z| = R$, tende uniformemente a zero quando R diverge. Ma allora possiamo portare il limite sotto il segno di integrale:

$$2\pi\, a_1 = \int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta})\, d\theta = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta})\, d\theta = 0\,,$$

da cui $a_1 = 0$. In altre parole, se f è una funzione limitata, somma di una serie di potenze convergente su tutto il piano complesso, $a_1 = 0$. Se consideriamo $g(z) = f(z)/z^2$, e ripetiamo il ragionamento, troviamo che $a_2 = 0$, ed iterando, che $a_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. Pertanto,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, z^k = a_0\,,$$

e dunque f è costante.

3. Serie di Taylor e funzioni analitiche

Nel precedente paragrafo, abbiamo studiato la convergenza di serie di potenze in campo complesso e — di conseguenza — in campo reale. In particolare, abbiamo visto che se $\rho > 0$ è il raggio di convergenza della serie, allora la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k\,, \qquad \forall x \in (-\rho, \rho)\,,$$

è derivabile con continuità infinite volte in $(-\rho, \rho)$, e si ha

$$f^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{+\infty} [k\,(k-1)\,\ldots(k-h+1)]\, a_k\, x^{k-h}\,, \qquad \forall x \in (-\rho, \rho)\,.$$

In particolare, si ha (ricordando che la serie converge puntualmente in $(-\rho, \rho)$,

$$f^{(h)}(0) = \sum_{k=h}^{+\infty} [k\,(k-1)\,\ldots(k-h+1)]\, a_k\;\; x^{k-h}\big|_{x=0} = h!\, a_h\,,$$

dato che tutti i termini si annullano nell'origine, tranne il primo. Pertanto, se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k\,, \qquad \forall x \in (-\rho, \rho)\,,$$

il polinomio di Maclaurin di ordine n di f (che sarebbe il polinomio di Taylor di ordine n di f in $x_0 = 0$) è dato da

$$P_n(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\,.$$

In altre parole, la somma parziale n-sima della serie di potenze che definisce f non è altro che il polinomio di Taylor di ordine n di f in $x_0 = 0$. Ovviamente, dato che la serie converge per ipotesi a $f(x)$ in $(-\rho, \rho)$, la serie di potenze che genera f non è altro che la serie di Taylor di f in $x_0 = 0$.

Abbiamo così dimostrato che se f è la somma di una serie di potenze il cui raggio di convergenza è $\rho > 0$, allora la serie di Taylor di f in $x_0 = 0$ converge a f in $(-\rho, \rho)$.

Ci poniamo ora la domanda inversa: supponiamo di avere una funzione f derivabile infinite volte e tale che la sua serie di Taylor in $x_0 = 0$, che è ovviamente una serie di potenze, abbia raggio di convergenza $\rho > 0$; è così definita la funzione

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\,, \qquad \forall x \in (-\rho, \rho)\,.$$

Sotto quali condizioni su f si ha $f \equiv g$? In altre parole: come deve essere fatta f in modo tale da poterla "ricostruire" completamente partendo dalla conoscenza della successione delle sue derivate in 0?

La domanda non è oziosa (ovvero, la risposta non è "basta che la serie di Taylor converga"), come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che la funzione è continua nell'origine; inoltre, essendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

si ha anche $f'(0) = 0$. Continuando a derivare, si trova[9] $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \ge 0$. Pertanto, il polinomio di Taylor di f è

$$P_n(x; 0) \equiv 0\,,$$

che, chiaramente, non converge a f quando n tende a più infinito (tranne che nell'origine), dato che f non è identicamente nulla. Pertanto, f è derivabile infinite volte, la sua serie di Taylor converge ovunque in $\mathbb{R}$, ma non converge ad f. Ovvero: non tutte le funzioni sono, come si dice, **sviluppabili** in serie di potenze.

[9]Esercizio!

Definizione 3.2. Una funzione f si dice **analitica** in un intervallo I se è sviluppabile in serie di potenze, ovvero se coincide in I con la somma della sua serie di Taylor.

L'esempio precedente dimostra che l'insieme delle funzioni analitiche è un sottoinsieme stretto dell'insieme delle funzioni infinitamente derivabili; ovviamente, l'insieme delle funzioni analitiche non è vuoto dato che contiene almeno la funzione nulla, tutti i polinomi, l'esponenziale e le funzioni trigonometriche seno e coseno.

Il prossimo risultato fornisce delle condizioni sufficienti sulle derivate della funzione f affinché la funzione sia analitica (ovviamente, non possono essere condizioni solo "puntuali", dato che l'Esempio 3.1 dimostra che controllare tutte le derivate in un punto non basta a "ricostruire" la funzione).

Teorema 3.3. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione infinitamente derivabile tale che*

$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \le M\, L^{n+1}\,, \qquad \forall n \ge 0\,,$$

con $L \ge 0$ e $M \ge 0$. Allora f è analitica in $[a, b]$.

Dimostrazione. Scriviamo la formula di Taylor con il resto in forma di Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi(n, x))}{(n + 1)!}\, x^{n+1}\,,$$

con $\xi(n, x)$ compreso tra 0 ed x. Chiaramente, si ha convergenza della serie a f se si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi(n, x))}{(n + 1)!}\, x^{n+1} = 0\,.$$

Per le ipotesi sulle derivate di f si ha, detto $R = \max(|a|, |b|)$,

$$\Big|\frac{f^{(n+1)}(\xi(n, x))}{(n + 1)!}\, x^{n+1}\Big| \le M\, \frac{R^{n+1}L^{n+1}}{(n + 1)!}\,.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R^{n+1}L^{n+1}}{(n + 1)!} = 0\,,$$

si ha la tesi. □

4. Compattezza nello spazio delle funzioni continue

Fino ad adesso si è parlato di proprietà che vengono conservate nel passaggio alla convergenza uniforme: continuità, derivabilità, integrabilità; a parte il "piccolo teorema del Dini" e il successivo teorema che ipotizzava la monotonia delle funzioni f_n, non abbiamo però dato condizioni sufficienti per la convergenza uniforme, o quanto meno per l'esistenza di una sottosuccessione uniformemente convergente. Dalla teoria della compattezza nel contesto degli spazi metrici segue ovviamente che se $\{f_n\}$ è una successione contenuta in un compatto K di (ad esempio) $(C^0([a,b];\mathbb{R}), d_\infty)$, allora da $\{f_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente. Il problema è, però, che i compatti di $(C^0([a,b];\mathbb{R}), d_\infty)$ sono, in un certo senso "sconosciuti", dato che "chiusura e limitatezza" non implicano "compattezza" in uno spazio di dimensione infinita quale è lo spazio delle funzioni continue. Ad esempio, la successione $f_n(x) = x^n$, con x in $[0,1]$, è contenuta nella sfera $B_1(0)$ in $(C^0([0,1];\mathbb{R}), d_\infty)$, ma non ammette alcuna sottosuccessione uniformemente convergente dato che il limite puntuale (che è il candidato limite per una qualsiasi sottosuccessione) è una funzione discontinua.

Una prima ipotesi che va necessariamente fatta sulle funzioni $\{f_n\}$ affinché possa esistere una sottosuccessione convergente, è che le funzioni, che sono limitate se prese singolarmente (grazie al Teorema di Weierstrass), siano **equilimitate**: deve esistere cioè una costante $M \geq 0$ tale che

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq M\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Che tale ipotesi sia in un certo senso necessaria, è chiarito dall'esempio $f_n(x) = n$; è evidente che da tale successione non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione uniformemente convergente, dato che il limite puntuale non è neanche una funzione.

Supponiamo allora che la successione $\{f_n(x)\}$ sia equilimitata. Questa ipotesi implica, in particolare, che la successione numerica $\{f_n(x)\}$ è limitata in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ per ogni x in $[a,b]$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, possiamo estrarre da $\{f_n(x)\}$ una sottosuccessione $\{f_{n_k}(x)\}$, convergente ad un numero reale y, dipendente da x (ed appartenente a $[-M, M]$). Facendo variare x in $[a,b]$, abbiamo così ottenuto una funzione f, il "candidato limite". Abbiamo ottenuto, o almeno così ci sembra, dato che la sottosuccessione che estraiamo da $\{f_n(x)\}$ dipende da x, e, a priori, cambia al variare di x in $[a,b]$. In altre parole, non abbiamo modo di sapere che esista un'unica sottosuccessione, indipendente da x, tale da convergere ad una funzione $f(x)$ definita su tutto $[a,b]$ (ricordiamo che, dal momento che la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, abbiamo bisogno di un limite puntuale per poter parlare di convergenza uniforme).

Come facciamo, allora, a trovare tale sottosuccessione? L'idea è di procedere "in diagonale", come abbiamo già fatto (nei complementi del precedente capitolo) per successioni in ℓ^p. Il problema, in questo caso, è che mentre nel caso di ℓ^p avevamo una "successione di successioni" (e quindi un oggetto numerabile, che permetteva di applicare il metodo diagonale per estrarre una sottosuccessione che andasse bene per ogni componente), qui uno dei due indici (x) si muove in un insieme non numerabile, ed è chiaro che non è possibile sperare di poter estrarre da $\mathbb{N}$ una sottosuccessione una quantità non numerabile di volte. Sembra, quindi, che non ci sia speranza di applicare il metodo diagonale in questo contesto. Fortunatamente, abbiamo ancora due carte da giocare: l'esistenza dei razionali (che sono numerabili e densi) e la continuità delle funzioni (che abbiamo usato fino ad ora solo per scrivere "max" in luogo di "sup" nel parlare di equilimitatezza).

Supponiamo allora che $[a,b] \cap \mathbb{Q} = \{x_m\}$. Se consideriamo la "successione di successioni" $\{f_n(x_m)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$, dal momento che, per ogni m in $\mathbb{N}$ la successione $\{f_n(x_m)\}$ è limitata, si può estrarre una sottosuccessione convergente; diagonalizzando (si veda il primo capitolo), esiste una sottosuccessione $\{f_{n_h}\}$ tale che per ogni m in $\mathbb{N}$ esiste un numero reale $y_m = f(x_m)$ per cui si ha

$$\lim_{h\to+\infty} f_{n_h}(x_m) = f(x_m)\,, \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,.$$

Dobbiamo ora riuscire, in qualche modo, a passare dai razionali di $[a,b]$ a tutti i numeri reali di tale intervallo: definire quindi una funzione f su tutto $[a,b]$, e dimostrare che $\{f_{n_h}\}$ vi converge uniformemente (cosicché f risulterà essere automaticamente continua). Per fare questo, useremo la continuità di $\{f_n\}$, non senza fare un'ulteriore ipotesi.

Partiamo dunque da f_n, funzione continua su $[a,b]$. Essendo $[a,b]$ compatto, la funzione f_n è uniformemente continua: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_{\varepsilon,n} > 0$ tale che

$$|x-y| < \delta_{\varepsilon,n} \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\,.$$

Tale proprietà vuol dire che, a patto di prendere x e y molto vicini tra di loro, le corrispondenti immagini sono vicine tra di loro; siccome ogni x di $[a,b]$ si può approssimare con un razionale (su cui, a meno di sottosuccessioni, f_n converge), si può sperare di fare un ragionamento del tipo "$f_n(x)$ è arbitrariamente vicino a $f_n(x_m)$, che converge a meno di sottosuccessioni, quindi $f_n(x)$, a meno di sottosuccessioni, converge"[(10)]; ed ecco trovato il limite puntuale.

Dov'è il problema nel ragionamento precedente? Che è sì vero che, ad n_h **fissato**, possiamo trovare un numero razionale x_m che dista da x meno di δ_{ε,n_h}, ma è pur vero che, dovendo far tendere n_h ad infinito, potrebbe essere che δ_{ε,n_h} tenda a zero, obbligandoci a "cambiare" il punto x_m scelto nell'intorno di x di raggio δ_{ε,n_h}; e questo non possiamo farlo, perché sappiamo che $\{f_{n_h}(x_m)\}$ converge ad m

---

[(10)] agitando molto velocemente le mani, e sperando di essere convincente.

fissato, ma nulla sappiamo di quello che accade ad una successione $\{f_{n_h}(x_{m_h})\}$ in cui si muova anche il punto[11].

Se, però, $\delta_{\varepsilon,n}$ **non dipende da** n, allora c'è speranza che le cose funzionino: dato x in $[a,b]$ esiste un razionale x_m **fisso** tale che $|x - x_m| < \delta_\varepsilon$, e quindi tale che $|f_{n_h}(x) - f_{n_h}(x_m)| < \varepsilon$, per ogni h in $\mathbb{N}$, e possiamo provare a continuare il ragionamento (senza agitare le mani, ma dimostrando rigorosamente le cose).

Supponiamo dunque che le funzioni $\{f_n\}$ siano **equi-uniformemente continue**: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Sia allora $\varepsilon > 0$; suddividiamo l'intervallo $[a,b]$ in un numero finito di intervalli di ampiezza minore di δ_ε (dato dall'equi-uniforme continuità): ovvero, sia ρ in $\mathbb{N}$, con $\rho > \frac{b-a}{\delta_\varepsilon}$, e consideriamo

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_\rho = b\,, \qquad y_j = a + \frac{b-a}{\rho}\, j\,,\ j = 0, \ldots, \rho\,.$$

Essendo $[a,b] \cap \mathbb{Q} = \{x_m\}$ denso in $[a,b]$, per ogni $j = 0, \ldots, \rho - 1$ esiste x_{m_j} in $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ tale che x_{m_j} appartiene a $[y_j, y_{j+1})$. Ricordiamo ora che la successione $\{f_{n_h}(x_{m_j})\}$, con x_{m_j} **fissato**, è convergente, e quindi è di Cauchy. Pertanto, dato $\varepsilon > 0$, esiste $h_{\varepsilon,j}$ in $\mathbb{N}$ tale che se h e k sono maggiori di $h_{\varepsilon,j}$ si ha

$$|f_{n_h}(x_{m_j}) - f_{n_k}(x_{m_j})| < \varepsilon\,.$$

Ricordiamo ora che gli x_{m_j} sono in numero finito (pari a ρ), e definiamo

$$h_\varepsilon = \max(h_{\varepsilon,0}, \ldots, h_{\varepsilon,\rho-1})\,.$$

Se prendiamo h e k maggiori di h_ε abbiamo dunque che

$$|f_{n_h}(x_{m_j}) - f_{n_k}(x_{m_j})| < \varepsilon\,, \qquad \forall j = 0, \ldots, \rho - 1\,.$$

Sia ora x in $[a,b]$; allora x appartiene ad uno, ed uno solo, degli intervalli $[y_j, y_{j+1})$, e quindi x dista da almeno uno dei razionali x_{m_0}, …, $x_{m_{\rho-1}}$ meno di δ_ε. Per l'equi-uniforme continuità, si ha allora

$$|f_n(x) - f_n(x_{m_j})| < \varepsilon\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

e quindi, in particolare,

$$|f_{n_h}(x) - f_{n_h}(x_{m_j})| < \varepsilon\,, \qquad \forall h \in \mathbb{N}\,.$$

(11) E non lo sappiamo perché, si veda il Teorema 1.16, abbiamo bisogno della convergenza uniforme per passare al limite "due volte", convergenza uniforme che è quella che stiamo cercando di dimostrare…

Siano ora h e k maggiori di h_ε; per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} |f_{n_h}(x) - f_{n_k}(x)| &\leq |f_{n_h}(x) - f_{n_h}(x_{m_j})| + |f_{n_h}(x_{m_j}) - f_{n_k}(x_{m_j})| \\ &\quad + |f_{n_k}(x_{m_j}) - f_{n_k}(x)| \leq 3\varepsilon\,, \end{aligned}$$

e la disuguaglianza è vera per ogni x in $[a,b]$. Ne segue pertanto che se h e k sono maggiori di h_ε, si ha

$$d_\infty(f_{n_h}, f_{n_k}) = \max_{x\in[a,b]} |f_{n_h}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 3\varepsilon\,,$$

e dunque la sottosuccessione $\{f_{n_h}\}$ è di Cauchy in $C^0([a,b];\mathbb{R}), d_\infty)$, che è completo. Pertanto, esiste f, funzione continua su $[a,b]$, tale che f_{n_h} converge uniformemente ad f. Si noti che la funzione f assume in x_m proprio il valore y_m che avevamo trovato come limite di $f_{n_h}(x_m)$.

Concludendo, abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema 4.1 (Ascoli-Arzelà)**.** *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ tale che:*

- *le $\{f_n\}$ sono equilimitate: esiste $M \geq 0$ tale che*
$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq M\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,;$$
- *le $\{f_n\}$ sono equi-uniformemente continue: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che*
$$|x-y| < \delta_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Allora da $\{f_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente.

Ripercorrendo la dimostrazione del teorema, dove abbiamo usato (o, meglio, cosa abbiamo usato) del fatto che le funzioni erano continue da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$? In altre parole, se avessimo avuto funzioni in $C^0(X,Y)$, quali ipotesi avremmo dovuto fare su X e Y?

- Deve esistere un insieme denso e numerabile contenuto in X; ovvero, lo spazio metrico X deve essere **separabile**.
- Nello spazio Y le successioni limitate devono ammettere sottosuccessioni convergenti; ciò, ad esempio, è vero se Y è compatto, o se in Y i limitati sono a chiusura compatta;
- Dobbiamo poter ricoprire X con un'unione finita di insiemi di raggio qualsiasi (non abbiamo alcun controllo su quanto può diventare piccolo δ_ε); in altre parole, X deve essere totalmente limitato. Se X è chiuso, questa ipotesi implica che X è compatto, e dunque tutte le funzioni f_n sono automaticamente uniformemente continue (ovviamente, non equi-uniformemente continue);

- Lo spazio di arrivo Y deve essere completo, per far sì che $C^0(X, Y)$ sia completo, e dunque tale che le successioni di Cauchy sono convergenti.

Alla luce di quanto appena detto, è chiaro che il Teorema di Ascoli-Arzelà vale per successioni di funzioni $\{f_n\}$ contenute in $C^0(K;\mathbb{R})$, con K compatto qualsiasi contenuto in uno spazio separabile.

Ora che abbiamo il Teorema di Ascoli-Arzelà, il cui enunciato può essere riformulato dicendo che i sottoinsiemi limitati ed equi-uniformemente continui di $C^0([a,b];\mathbb{R})$ sono a chiusura compatta, ci chiediamo se sia possibile "alleggerire" le ipotesi sulla successione $\{f_n\}$ in modo da garantirci che le ipotesi del teorema siano soddisfatte.

Teorema 4.2. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ tale che*

- *Esiste x_0 in $[a,b]$ tale che $\{f_n(x_0)\}$ è limitato;*
- *Le funzioni $\{f_n\}$ sono* **equi-lipschitiziane***: esiste $L \geq 0$ tale che*

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L\,|x-y|\,, \qquad \forall x, y \in [a,b]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Allora da $\{f_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente.

Dimostrazione. Dimostriamo che la successione $\{f_n\}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà. Sia $M \geq 0$ tale che $|f_n(x_0)| \leq M$, e sia $R = \max(x_0 - a, b - x_0)$. Allora, dalla equi-lipschtizianità, scritta per $y = x_0$, si ha

$$-M - L\,R \leq f_n(x_0) - L|x - x_0| \leq f_n(x) \leq f_n(x_0) + L\,|x - x_0| \leq M + L\,R\,,$$

e dunque

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq M + L\,R\,,$$

che dimostra che le funzioni sono equilimitate. La equi-uniforme continuità discende poi immediatamente dalla equi-lipschitizianità scegliendo $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$. □

Ricordando che, se f e g sono funzioni in $C^1([a,b];\mathbb{R})$, e se x_0 è in $[a,b]$, allora

$$d_{C^1}(f,g) = |f(x_0) - g(x_0)| + d_\infty(f', g')\,,$$

è una distanza su $C^1([a,b];\mathbb{R})$ che lo rende completo, abbiamo il seguente teorema.

Teorema 4.3. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $(C^1([a,b];\mathbb{R}), d_{C^1})$, limitata. Allora da $\{f_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste $M \geq 0$ tale che

$$d_{C^1}(f_n, 0) = |f_n(x_0)| + \max_{x\in[a,b]} |f_n'(x)| \leq M\,.$$

Si ha pertanto che $\{f_n(x_0)\}$ è limitata ed inoltre, per il teorema di Lagrange,

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n'(\xi)||x-y| \leq M\,|x-y|\,,$$

cosicché le $\{f_n\}$ sono equi-lipschitiziane. La tesi segue allora dal teorema precedente. $\square$

Esempio 4.4. Sia ora $f_n(x) = x^n$, per x in $[0,1]$. Già sappiamo che da $\{f_n\}$ non si può estrarre alcuna sottosuccessione uniformemente convergente, dato che il limite puntuale è discontinuo. Essendo chiaramente le $\{f_n\}$ equilimitate, deve essere falso che le f_n sono equi-uniformemente continue. Per vederlo, dimostriamo che se $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, per ogni $\delta > 0$ esistono due punti x_δ e y_δ in $[0,1]$ che distano meno di δ, e tali che le corrispondenti immagini distano più di ε per infiniti valori di n. Scegliamo dunque $x_\delta = 1$ e $y_\delta = 1 - \frac{\delta}{2}$; allora $|x_\delta - y_\delta| < \delta$, ma

$$|f_n(x_\delta) - f_n(y_\delta)| > \frac{1}{2}, \qquad \text{per infiniti valori di } n,$$

dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^n\right] = 1\,.$$

Un'altra ipotesi che abbiamo usato per dimostrare il Teorema di Ascoli-Arzelà è la compattezza dell'insieme $[a,b]$. Anche tale ipotesi non può essere evitata, come dimostra il seguente esempio. Sia $f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$, per x in $[0,+\infty)$. È facile vedere che le funzioni f_n convergono puntualmente a zero, ma non uniformemente dato che

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \mathrm{e}^{-(x-n)^2} = \mathrm{e}^{-(n-n)^2} = 1\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

La successione $\{f_n\}$ è però fatta di funzioni equilimitate (da 1) ed equi-uniformemente continue. Infatti,

$$f_n(x) = g(x-n)\,, \quad \text{dove } g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Essendo g lipschitziana (per Lagrange), g è uniformemente continua, e dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |g(x) - g(y)| < \varepsilon\,.$$

Osservando che se $|x-y| < \delta_\varepsilon$, allora $|(x-n)-(y-n)| < \delta_\varepsilon$, abbiamo quindi che

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_n(y)| = |g(x-n) - g(y-n)| < \varepsilon\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

come volevasi dimostrare.

5. Serie di Fourier

Siano $\{a_k\}_{k\geq 0}$ e $\{b_k\}_{k\geq 1}$ due successioni di numeri reali; fissato n in $\mathbb{N}$ consideriamo la funzione

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]\,,$$

che chiameremo **polinomio trigonometrico** di coefficienti $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

Essendo ognuna delle funzioni che compaiono nella sommatoria periodica di periodo 2π, anche s_n è periodica di periodo 2π. Se supponiamo che $s_n(x)$ converga, quando n tende ad infinito, e per ogni x in $\mathbb{R}$, ad una funzione $s(x)$, anche s sarà periodica di periodo 2π. Essendo poi s_n continua per ogni n, se la convergenza di s_n a s fosse uniforme, allora anche s sarebbe continua (e derivabile se la serie s_n convergesse uniformemente così come s'_n, e così via).

La domanda che ora ci poniamo è l'inversa: data una funzione f periodica di periodo 2π, quando si può scrivere l'uguaglianza

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]\,?$$

Una prima osservazione riguarda il legame tra la funzione f ed i coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$. Se, infatti, supponiamo ad esempio che la serie s_n converga ad f uniformemente, è possibile scambiare serie ed integrali, cosicché

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(hx)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(hx)\,dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(hx)\,dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \cos(hx)\,dx\,,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(hx)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(hx)\,dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \operatorname{sen}(hx)\,dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(hx)\,dx\,.\end{aligned}$$

Ora, si vede facilmente che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(hx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(hx)\,dx = \delta_{h,k}\,\pi\,, \qquad \forall h, k \geq 1\,,$$

e che
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,\operatorname{sen}(hx)\,dx = 0\,, \qquad \forall h, k \geq 1\,.$$
Pertanto nelle due sommatorie precedenti tutti gli addendi sono nulli, e quindi si ottiene
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,dx\,, \qquad \forall k \geq 0\,,$$
e
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen}(kx)\,dx\,, \qquad \forall k \geq 1\,.$$
Le due successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ così definite si chiamano **coefficienti di Fourier** di f; si osservi che è sufficiente che la funzione f sia integrabile secondo Riemann su $[-\pi, \pi]$ affinché i coefficienti di Fourier siano ben definiti.

Osservazione 5.1. Osserviamo che, essendo $\cos(kx)$ una funzione pari, e $\operatorname{sen}(kx)$ una funzione dispari, si ha
$$f \text{ pari} \quad \Longrightarrow \quad b_k = 0\,, \qquad f \text{ dispari} \quad \Longrightarrow \quad a_k = 0\,,$$
per ogni k.

Nuovamente, quindi, ci poniamo la domanda: data f, e calcolati i coefficienti di Fourier di f, quando il polinomio trigonometrico s_n definito a partire da tali coefficienti converge ad f? Ed in che modo?

La risposta è data dal seguente teorema.

Teorema 5.2. *Sia f una funzione periodica di periodo 2π, continua con derivata continua. Allora la serie di Fourier di f converge per ogni x di $\mathbb{R}$, e si ha*
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k\,\cos(kx) + b_k\,\operatorname{sen}(kx)]\,.$$

Prima di dimostrare il Teorema 5.2, abbiamo bisogno di alcuni risultati tecnici.

Lemma 5.3. *Sia, per n in $\mathbb{N}$ e per x in $[-\pi, \pi]$,*
$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{se } x \neq 0, \\ n + \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Allora si ha
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = D_n(x)\,.$$

Dimostrazione. Se $x = 0$, l'identità è banalmente verificata; se $x \neq 0$, osserviamo che per ogni k intero si ha

$$\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)\,.$$

Sommando le relazioni precedenti per k da 1 ad n si ha

$$\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\,,$$

che dà l'identità cercata dividendo per $2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$. □

Lemma 5.4. *Sia f una funzione periodica di periodo 2π, integrabile in $[-\pi,\pi]$, e sia s_n la somma parziale n-sima della sua serie di Fourier. Allora*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt\,.$$

Dimostrazione. Ricordando la definizione di coefficienti di Fourier, ed usando la linearità dell'integrale, si ha

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\Big[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ky)\cos(kx) + \operatorname{sen}(ky)\operatorname{sen}(kx)\Big]\,dy\,.$$

Per le formule di addizione degli archi, la quantità dentro la parentesi quadra non è altro che

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(y-x)] = D_n(y-x)\,,$$

e quindi

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,D_n(y-x)\,dy\,.$$

Ponendo $t = y - x$, l'integrale diventa

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\,D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt\,,$$

dove l'ultimo passaggio è motivato dal fatto che l'integrale di una funzione periodica su un intervallo lungo quanto il periodo è costante (e quindi gli estremi possono essere cambiati a piacimento, purché la loro distanza rimanga la stessa). □

Esercizio 5.5. Sia f una funzione periodica di periodo T e continua. Dimostrare che la funzione

$$g(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)\,dt\,,$$

è costante.

Lemma 5.6. *Sia $f : [-\pi, \pi]$ una funzione limitata ed integrabile; allora $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$, i coefficienti di Fourier di f, appartengono a ℓ^2, e si ha*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k^2 + b_k^2] \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx\,.$$

Dimostrazione. Date due funzioni f e g limitate ed integrabili, definiamo

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Sia ora $s_n(x)$ la somma parziale n-sima della serie di Fourier di f, i cui coefficienti sono

$$a_k = \frac{1}{\pi}\, (f(x)|\cos(kx))\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\, (f(x)|\operatorname{sen}(kx))\,.$$

Allora si ha, osservando che $(\cdot|\cdot)$ è lineare in entrambi gli argomenti,

$$\begin{aligned}(f(x)|s_n(x)) &= \frac{a_0}{2}\, (f(x)|1) + \sum_{k=1}^{n} \Big[a_k\, (f(x)|\cos(kx)) + b_k\, (f(x)|\operatorname{sen}(kx))\Big] \\ &= \pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k^2 + b_k^2]\Big]\,.\end{aligned}$$

D'altra parte, dato che

$$(\cos(kx)|\operatorname{sen}(hx)) = 0\,, \qquad \forall h, k\,,$$

e

$$(\cos(kx)|\cos(hk)) = 0 = (\operatorname{sen}(kx)|\operatorname{sen}(hk))\,, \qquad \forall h \neq k\,,$$

si ha, per $h \geq 1$,

$$\begin{aligned}(s_n(x)|\cos(hx)) &= \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]\;|\cos(hx)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k\, (\cos(kx)|\cos(hx)) = \pi\, a_h\,,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(s_n(x)|\operatorname{sen}(hx)) &= \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]\;|\operatorname{sen}(hx)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k\, (\operatorname{sen}(kx)|\operatorname{sen}(hx)) = \pi\, b_h\,,\end{aligned}$$

mentre

$$(s_n(x), 1) = \pi\, a_0\,.$$

Dalle relazioni precedenti, segue (sempre per linearità) che

$$(s_n(x)|s_n(x)) = \pi\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k^2 + b_k^2]\Big]\,.$$

Ora, essendo

$$0 \le (f(x) - s_n(x)|f(x) - s_n(x)) = (f(x)|f(x)) - 2(f(x)|s_n(x)) + (s_n(x)|s_n(x))\,,$$

si ha, usando le identità precedenti,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k^2 + b_k^2] \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\,.$$

Dal momento che la serie è a termini positivi, e le somme parziali sono limitate dall'alto, si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}[a_k^2 + b_k^2] \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < +\infty\,,$$

e la tesi è dimostrata. □

Osservazione 5.7. Si osservi che se i coefficienti di Fourier di f sono in ℓ^1, che è una condizione più forte dell'essere in ℓ^2, allora la serie di Fourier converge uniformemente; infatti,

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |a_k\,\cos(kx) + b_k\,\mathrm{sen}(kx)| \le |a_k| + |b_k|\,,$$

cosicché la serie converge totalmente (e quindi uniformemente).

Una conseguenza del Lemma 5.6 è il seguente risultato.

Lemma 5.8 (Riemann-Lebesgue)**.** *Sia $f : [-\pi,\pi]$ una funzione limitata ed integrabile; allora*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,dx = 0 = \lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Dal momento che ogni successione in ℓ^2 è infinitesima (per la condizione necessaria di convergenza), si ha che sia $\{a_k\}$ che $\{b_k\}$, i coefficienti di Fourier di f, sono successioni infinitesime. Ricordandone l'espressione, si ha la tesi. □

Siamo ora pronti per la dimostrazione del Teorema 5.2.

Dimostrazione del Teorema 5.2. Dal Lemma 5.4, abbiamo che

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, dt\,.$$

D'altro canto, essendo — come si verifica facilmente —

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1\,,$$

possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, D_n(t)\, dt\,,$$

da cui segue che

$$f(x) - s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)]\, D_n(t)\, dt\,.$$

Se definiamo $\phi(t,x) = f(x) - f(x+t)$ l'identità precedente si scrive

$$f(x) - s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t,x)\, D_n(t)\, dt\,,$$

cosicché la tesi è dimostrata se dimostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t,x)\, D_n(t) = 0\,.$$

Se espandiamo la definizione di $D_n(t)$ usando le formule di addizione degli archi, abbiamo

$$D_n(t) = \frac{1}{2}\cos(nt) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(nt)\, \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\,,$$

cosicché

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t,x)\, D_n(t)\, dt \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t,x)\, \cos(nt)\, dt \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\phi(t,x)\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\right]\, \mathrm{sen}(nt)\, dt\,.\end{aligned}$$

La tesi seguirà allora dal Lemma di Riemann-Lebesgue se dimostriamo che, per ogni x in $[-\pi,\pi]$ fissato, le funzioni

$$t \mapsto \phi(t,x)\,, \qquad \text{e} \qquad t \mapsto \phi(t,x)\, \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\,,$$

sono limitate ed integrabili. Ora, essendo f continua, $\phi(t,x) = f(x) - f(x+t)$ è continua in t, e quindi la prima parte è dimostrata (per Weierstrass). Inoltre, essendo $\cos(\frac{t}{2})$ e $\mathrm{sen}(\frac{t}{2}) \neq 0$ per $t \neq 0$, la seconda funzione è continua per $t \neq 0$.

Per $t = 0$, può essere però prolungata per continuità dato che, per de l'Hôpital (che si può applicare perché f ha derivata continua),

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\phi(t,x)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{2f'(x+t)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -2f'(x)\,.$$

Dunque, anche la seconda funzione è continua su $[-\pi,\pi]$, ed il lemma di Riemann-Lebesgue si può applicare. □

Osservazione 5.9. Ripercorrendo la dimostrazione del Teorema precedente, il fatto che f fosse C^1 è stato utilizzato solo nell'ultimo passaggio per applicare il Teorema di de l'Hôpital. Con una dimostrazione leggermente diversa, lo stesso risultato vale supponendo solo che f sia continua e **regolare a tratti**: è possibile decomporre l'intervallo $[-\pi,\pi]$ in un numero finito di sottointervalli su ognuno dei quali f è C^1, cone derivata che ammette limite finito negli estremi di tali intervalli.

Le ipotesi per la validità del teorema possono essere ulteriormente indebolite, eliminando la continuità sulla funzione f (ma continuando a supporre che sia regolare a tratti); in questo caso, però, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \frac{1}{2}\Big[\lim_{h\to 0^+} f(x+h) + \lim_{h\to 0^+} f(x-h)\Big]\,.$$

Esempio 5.10. Sia $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le \pi, \\ -1 & \text{se } -\pi \le x < 0, \end{cases}$$

prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,dx = 0\,, \quad \forall k \ge 0\,,$$

dato che f è dispari e $\cos(kx)$ è pari, mentre, essendo $\operatorname{sen}(kx)$ dispari come f,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi}\,, \quad \forall k \ge 1\,,$$

e quindi

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari}, \\ \frac{4}{k\,\pi} & \text{se } k \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Pertanto, se $x \ne 0$, e $x \ne \pm\pi$,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k+1)x)}{2k+1}\,.$$

Se, ad esempio, scegliamo $x = \frac{\pi}{2}$, dato che $\mathrm{sen}((2k+1)x) = (-1)^k$, abbiamo

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\,,$$

mentre se scegliamo $x = \frac{\pi}{4}$, dato che $\mathrm{sen}((2k+1)x) = (-1)^{[k/2]}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, dove $[\cdot]$ è la parte intera, abbiamo

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\,\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{[k/2]}}{2k+1} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{7} + \dots\,.$$

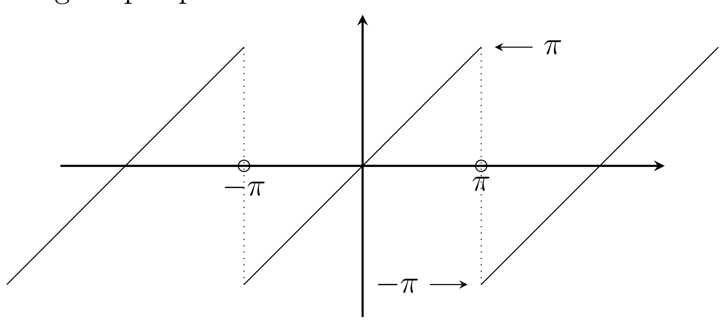
Consideriamo adesso $f(x) = x$ (sempre prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$); allora, essendo f dispari si ha $a_k = 0$ per ogni x, mentre

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{k}\,(-1)^{k+1}\,.$$

Pertanto, per ogni x in $-(\pi,\pi)$ si ha

$$x = 2\,\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\mathrm{sen}(kx)\,.$$

Se scegliamo $x = \pi$, essendo $\mathrm{sen}(k\pi) = 0$ per ogni x, la serie converge a zero (tutti gli addendi sono nulli), e ovviamente zero non è il valore di $f(x) = x$ per $x = \pi$; zero è però la semisomma dei due limiti da destra e da sinistra in $x = \pi$ della funzione f prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$:



Infine, consideriamo la funzione $f(x) = |x|$, prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}$; essendo f pari, i coefficienti b_k sono tutti nulli, mentre

$$a_0 = \pi\,, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\,\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\int_0^{\pi} x\,\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\,.$$

In sostanza,

$$a_k = \begin{cases} \pi & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari, diverso da zero,} \\ -\frac{4}{k^2\,\pi} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Pertanto,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} .$$

Scegliendo $x = 0$ (o $x = \pm\pi$) si trova

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} .$$

Si noti che la convergenza di quest'ultima serie è più rapida delle serie trovate in precedenza (che, tra l'altro, convergono solo semplicemente e non assolutamente).

Esercizio 5.11. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Abbiamo dimostrato che se la funzione f è periodica su $\mathbb{R}$ e C^1, allora la serie di Fourier converge puntualmente ad f. In realtà, la convergenza è uniforme.

Teorema 5.12. *Sia f una funzione periodica di periodo 2π e continua con derivata continua. Allora α_k e β_k, i coefficienti di Fourier di f', sono legati ai coefficienti di Fourier a_k e b_k di f dalle formule:*

$$\alpha_k = k\, b_k , \qquad \beta_k = -k\, a_k .$$

Inoltre, $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ appartengono ad ℓ^1, e la serie di Fourier di f converge uniformemente.

Dimostrazione. Per definizione si ha

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0 ,$$

perché f è periodica; inoltre, se $k \geq 1$, integrando per parti

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\, f(x)\, \cos(kx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{sen}(kx)\, dx ,$$

e quindi, essendo il primo termine nullo per la periodicità di f e la parità di $\cos(kx)$, si ha

$$\alpha_k = \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{sen}(kx)\, dx = k\, b_k .$$

Inoltre, sempre se $k \geq 1$, e sempre integrando per parti,

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, \mathrm{sen}(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\, f(x)\, \mathrm{sen}(kx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(kx)\, dx ,$$

da cui segue la seconda formula.

Ricordando il Lemma 5.6, le due successioni $\{\alpha_k\}$ e $\{\beta_k\}$ appartengono a ℓ^2, e quindi sia $\{k\alpha_k\}$ che $\{k\beta_k\}$ sono in ℓ^2; ricordando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per le serie, abbiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,(k\,|a_k|) \le \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} (k|a_k|)^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\,,$$

e analogamente per $\{b_k\}$. Per l'Osservazione 5.7 la serie di Fourier di f converge totalmente, e quindi uniformemente. $\square$

Osservazione 5.13. Si noti che se

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]\,,$$

allora,

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} [k\,b_k \cos(kx) - k\,a_k \operatorname{sen}(kx)] = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \operatorname{sen}(kx)]\,,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il teorema precedente; pertanto, "la derivata della somma parziale n-sima della serie di Fourier di f" è "la somma parziale n-sima della serie di Fourier della derivata di f".

Il risultato del teorema precedente può essere applicato più volte: se, ad esempio, f è periodica di periodo 2π e di classe C^2, allora i coefficienti di Fourier di f' sono in ℓ^1, e la serie di Fourier di f' converge uniformemente (così come la serie di Fourier di f). Se la funzione è di classe C^∞, la convergenza della serie di Fourier, e di tutte le sue derivate, è uniforme.

6. Il teorema di Stone-Weierstrass

Nella precedente sezione abbiamo visto che i polinomi trigonometrici possono essere usati per approssimare funzioni di classe C^1 (e periodiche), con i coefficienti della serie di Fourier definiti univocamente a partire dalla funzione f.

Non solo i polinomi trigonometrici, ma anche i polinomi sono densi nell'insieme delle funzioni continue.

Teorema 6.1 (Stone-Weierstrass)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste una successione $\{p_n\}$ di polinomi tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} d_\infty(p_n, f) = 0\,.$$

Ovvero, ogni funzione continua su $[a,b]$ è limite uniforme di una successione di polinomi.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, data f funzione continua su $[a,b]$, la funzione $g(x) = f(a+(b-a)x)$ è continua su $[0,1]$; dal momento che il cambio di variabili è invertibile, e la sua inversa è un polinomio di grado 1, è sufficiente dimostrare che ogni funzione continua su $[0,1]$ si può approssimare in maniera uniforme con una successione di polinomi; sia allora n in $\mathbb{N}$, e definiamo il polinomio di Bernstein di f come

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\, x^k\, (1-x)^{n-k}\,.$$

Chiaramente, p_n è un polinomio di grado n. Sia ora $\varepsilon > 0$, e sia $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Una tale δ_ε esiste perché la funzione f è uniformemente continua. Osserviamo ora che, per la formula del binomio di Newton, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1\,. \tag{6.1}$$

Sempre per la formula del binomio di Newton,

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}\,,$$

da cui, derivando rispetto a p (e quindi tenendo q costante), si trova

$$n\,(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k\, p^{k-1}\, q^{n-k} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k\, p^k\, q^{n-k}\,.$$

Dividendo per n, si trova

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n}\, p^k\, q^{n-k} = p\,(p+q)^{n-1}\,, \tag{6.2}$$

e scegliendo $p = x$ e $q = 1-x$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n}\, x^k\, (1-x)^{n-k} = x\,. \tag{6.3}$$

Ripartendo da (6.2), e derivando nuovamente rispetto a p, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n}\, p^{k-1}\, q^{n-k} = (p+q)^{n-1} + (n-1)\,p\,(p+q)^{n-2} = (p+q)^{n-2}[n\,p+q]\,.$$

Dividendo nuovamente per n, e moltiplicando per p, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2}\, p^k\, q^{n-k} = p\,(p+q)^{n-2}\Big[p + \frac{q}{n}\Big]\,,$$

e scegliendo $p = x$ e $q = 1-x$ si arriva a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2}\, x^k\, (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\,. \tag{6.4}$$

Mettendo insieme (6.1), (6.3) e (6.4), si ottiene

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}\,. \tag{6.5}$$

Ora, usando (6.1) si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x)\, x^k (1-x)^{n-k}\,,$$

e quindi

$$|p_n(x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k}\,.$$

Sia ora x fissato in $[0,1]$; spezziamo l'insieme $E = \{0, 1, \ldots, n\}$ in due parti:

$$E_1 = \left\{ k \in E : \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta_\varepsilon \right\}, \qquad E_2 = \left\{ k \in E : \left| \frac{k}{n} - x \right| \ge \delta_\varepsilon \right\}.$$

Si ha allora, per l'uniforme continuità e per la (6.1),

$$\sum_{k \in E_1} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k} \le \varepsilon \sum_{k \in E_1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \varepsilon\,.$$

Per quanto riguarda la sommatoria su E_2, si ha, essendo $\delta_\varepsilon^2 \le (\frac{k}{n} - x)^2$, e se M è il massimo di f su $[0,1]$ (che esiste finito per il Teorema di Weierstrass),

$$\delta_\varepsilon^2 \sum_{k \in E_2} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k} \le 2M \sum_{k \in E_2} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}\,.$$

Maggiorando la somma con la somma su tutti i k da 0 ad n, si ha, usando (6.5),

$$\sum_{k \in E_2} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{x(1-x)}{n}\,,$$

cosicché

$$\sum_{k \in E_2} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k} \le 2M\, \frac{x(1-x)}{n\, \delta_\varepsilon^2}\,.$$

In sostanza,

$$|p_n(x) - f(x)| \le \varepsilon + 2M\, \frac{x(1-x)}{n\, \delta_\varepsilon^2}\,.$$

Dal momento che la stima vale per ogni x in $[0,1]$, si ha

$$d_\infty(p_n, f) \le \varepsilon + \frac{M}{2n\, \delta_\varepsilon^2}\,,$$

e, facendo tendere n ad infinito,

$$0 \le \liminf_{n \to +\infty} d_\infty(p_n, f) \le \limsup_{n \to +\infty} d_\infty(p_n, f) \le \varepsilon\,,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ottiene la tesi. $\square$

Esempio 6.2. Se $f(x) = \mathrm{e}^x$, i polinomi dati dal teorema precedente sono

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\, x^k\, (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\, x\big)^k\, (1-x)^{n-k} = \big(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\, x + 1 - x\big)^n\,,$$

ovvero

$$p_n(x) = \Big(1 + \big(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\big)\, x\Big)^n\,,$$

che si vede facilmente essere convergenti (almeno puntualmente) a e^x, sfruttando il limite notevole per l'esponenziale.

Se, invece, $f(x) = \cos(x)$, possiamo ripetere il ragionamento precedente ricordando che $\cos(x) = (\mathrm{e}^{i\,x} + \mathrm{e}^{-i\,x})/2$, ed ottenere

$$p_n(x) = \frac{1}{2}\Big(1 + \big(\mathrm{e}^{\frac{i}{n}} - 1\big)\, x\Big)^n + \frac{1}{2}\Big(1 + \big(\mathrm{e}^{-\frac{i}{n}} - 1\big)\, x\Big)^n\,.$$

Grazie al prossimo teorema, ai polinomi "qualsiasi" possiamo sostituire i polinomi a coefficienti razionali.

Teorema 6.3. *Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali, di grado n; allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un polinomio $q_\varepsilon(x)$, a coefficienti razionali, di grado n, e tale che*

$$\max_{x\in[a,b]} |p(x) - q_\varepsilon(x)| \le \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Sia $M = \max(|a|, |b|)$. Supponiamo che

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\,, \qquad a_k \in \mathbb{R}\,.$$

Siano b_0, …, b_n dei numeri razionali tali che

$$|a_k - b_k| \le \frac{\varepsilon}{(n+1)\, M^k}\,, \qquad \forall k = 0, 1, \ldots, n\,,$$

e sia

$$q_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k\,.$$

Allora

$$|p(x) - q_\varepsilon(x)| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k||x^k| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{(n+1)\, M^k} M^k = \varepsilon\,.$$

La tesi segue allora passando al massimo su x in $[a,b]$. □

Teorema 6.4. *Sia f una funzione continua su $[a,b]$; allora esiste una successione $\{q_n(x)\}$ di polinomi a coefficienti razionali tale che q_n converge uniformemente ad f.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Stone-Weierstrass, f si può approssimare con una successione $\{p_n\}$ di polinomi: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \ge n_\varepsilon$ si ha

$$0 \le d_\infty(p_n, f) < \varepsilon\,.$$

D'altra parte, per ogni polinomio p_n della successione, esiste un polinomio q_n, a coefficienti razionali, tale che

$$d_\infty(p_n, q_n) \le \varepsilon\,.$$

La tesi segue allora dalla disuguaglianza triangolare. □

Teorema 6.5. *Lo spazio* $(C^0([a,b];\mathbb{R}), d_\infty)$ *è* **separabile***: esiste un insieme denso e numerabile.*

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato nel teorema precedente che i polinomi a coefficienti razionali sono densi in $C^0([a,b];\mathbb{R})$, cosicché non resta che dimostrare che l'insieme di tali polinomi è numerabile. Sia

$$Q_n = \{\text{polinomi di grado } n \text{ a coefficienti razionali}\}\,.$$

Allora, evidentemente,

$$\{\text{polinomi a coefficienti razionali}\} = \bigcup_{n\geq 0} Q_n\,,$$

e quindi è sufficiente dimostrare che Q_n è numerabile per concludere la dimostrazione. Sia ora

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k\, x^k\,, \qquad q_k \in \mathbb{Q}\,,\ q_n \neq 0\,,$$

un polinomio di Q_n. Allora l'applicazione $S : Q_n \to \mathbb{Q}^{n+1}$ definita da $S(q(x)) = \{q_0, \ldots, q_n\}$ è biunivoca, e quindi Q_n ha la stessa cardinalità di $\mathbb{Q}^{n+1}$, che è numerabile. □

Serie numeriche: richiami

Ricordiamo rapidamente la definizione di serie di numeri reali, ed alcuni criteri di convergenza.

Definizione 6.6. Data una successione $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di numeri reali, definiamo la *successione delle somme parziali*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$
Se esiste finito il limite S per n tendente ad infinito di S_n, diciamo che la serie di termine generico a_k è convergente, e scriviamo
$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \,,$$
per intendere
$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$
Con abuso di notazione, scriveremo in questo caso
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty \,.$$
Diciamo che la serie diverge (positivamente o negativamente) se il limite di S_n è più infinito o meno infinito, e diciamo che non converge se il limite non esiste. Con abuso di notazione, scriveremo, in questi ultimi tre casi
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \pm\infty \,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \text{non esiste.}$$

Esempio 6.7. Si ha:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \begin{cases} \frac{q}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1, \\ +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1, \end{cases} \qquad \text{(serie geometrica di ragione } q\text{)}$$
e
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > 1, \\ = +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases} \qquad \text{(serie armonica generalizzata)}$$
Inoltre, vale la **condizione necessaria** per la convergenza di una serie: se la serie converge, allora la successione a_k è infinitesima.

Ricordando che una serie a termini positivi (ovvero tale che $a_k \geq 0$ per ogni k — o quanto meno definitivamente) o converge o diverge positivamente (dal momento che la successione delle somme parziali è monotona crescente), e si ha
$$a_k \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} a_k \,,$$

abbiamo i seguenti criteri di convergenza per serie a termini positivi:

- **criterio del confronto**: se $0 \le a_k \le b_k$ per ogni k (o definitivamente), allora
$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty\,,$$
e
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty\,;$$
- **criterio del confronto asintotico**: se $a_k \ge 0$ e $b_k \ge 0$ per ogni k (o definitivamente), e se esiste
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in (0,+\infty)\,,$$
allora
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty\,;$$
se $L = 0$, allora valgono le conclusioni del criterio del confronto; se, invece, $L = +\infty$, valgono le conclusioni del criterio del confronto con i ruoli di a_k e b_k scambiati;
- **criterio del rapporto**: se $a_k \ge 0$ per ogni k (o definitivamente), allora
$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \in (0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty\,,$$
e
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L > 1\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty\,;$$
- **criterio della radice**: se $a_k \ge 0$ per ogni k (o definitivamente), allora
$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = L \in (0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty\,,$$
e
$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = L > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty\,;$$
- **criterio di Cauchy**: se $a_k \ge 0$ per ogni k (o definitivamente), e se a_k è decrescente (o quanto meno lo è definitivamente), allora
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty\,.$$

Se, invece di essere a termini non negativi, la serie è a termini di segno variabile, i criteri si riducono drasticamente:

- se la serie di termine generico $|a_k|$ converge, si parla di **convergenza assoluta**, che implica la convergenza "semplice"; chiaramente, per determinare la convergenza assoluta di una serie è possibile utilizzare tutti i criteri validi per le serie a termini positivi;
- **criterio di Leibniz per le serie a segni alterni**: se $a_k = (-1)^k b_k$, con $b_k \geq 0$, decrescente (o definitivamente) ed infinitesima, allora la serie di termine generico a_k è convergente.

Se, invece di essere numeri reali, i termini della serie sono numeri complessi $z_k = a_k + i\, b_k$, la convergenza della serie si può definire in due modi (equivalenti): si dice che la serie converge se la successione delle somme parziali

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \,,$$

converge (in $(\mathbb{C}, |\cdot|)$) ad un numero complesso z, ovvero se le due successioni delle somme parziali

$$R(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \,, \qquad I(n) = \sum_{k=1}^{n} b_k \,,$$

sono convergenti in $\mathbb{R}$ (o, meglio, in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) a due numeri reali a e b; si dimostra facilmente che se S_n tende a $z = a + i\, b$, allora $R(n)$ tende ad a ed $I(n)$ tende a b; e viceversa. Similmente a quello che succede per serie di numeri reali, si parla di convergenza **assoluta** per una serie di numeri complessi se

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \,,$$

è convergente in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (dato che $|z_k|$ è un numero reale).

Dimostrazione dei varî criteri.

Condizione necessaria. Sappiamo per ipotesi che la serie converge, ovvero che esiste finito

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n \,,$$

il che implica che

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} \,,$$

e quindi che

$$\lim_{n\to+\infty} [S_n - S_{n-1}] = S - S = 0 \,.$$

La convergenza a zero di a_n segue allora dall'osservazione che $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Criterio del confronto. Dalla relazione $0 \leq a_k \leq b_k$ segue, sommando, che

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \,;$$

analogo risultato si ottiene se la maggiorazione vale per ogni $k \geq k_0$, sommando a partire da k_0. Il risultato segue allora dai teoremi di confronto sulle successioni; in particolare, per il primo caso, si ha

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty\,,$$

che, valendo per ogni n in $\mathbb{N}$, implica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty\,.$$

Criterio del confronto asintotico. Iniziamo col caso $0 < L < +\infty$; per definizione di limite (scegliendo $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$), esiste $\overline{k}$ in $\mathbb{N}$ tale che

$$k \geq \overline{k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{L}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3L}{2}\,,$$

e quindi

$$k \geq \overline{k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{L}{2}\, b_k \leq a_k \leq \frac{3L}{2}\, b_k\,.$$

La tesi segue allora dal criterio del confronto, osservando che le serie di termine generico $\frac{L}{2}\, b_k$ e $\frac{3L}{2}\, b_k$ convergono o divergono se e solo se la serie di termine generico b_k converge o diverge. Se $L = 0$, o se $L = +\infty$, solo una delle disuguaglianze precedenti è definitivamente vera, e quindi si può applicare solo un caso del criterio del confronto.

Criterio del rapporto. Iniziamo con il caso $0 \leq L < 1$; sia $\varepsilon > 0$ e tale che $L + \varepsilon < 1$; per definizione di limite superiore, esiste allora $\overline{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che $n \geq \overline{n}$ implica

$$0 \leq \sup_{k\geq n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq L + \varepsilon\,,$$

da cui segue, in particolare, che se $k \geq \overline{n}$ si ha

$$a_{k+1} \leq (L+\varepsilon)\, a_k\,.$$

Scegliendo $k = \overline{n}$, abbiamo $a_{\overline{n}+1} \leq (L+\varepsilon)\, a_{\overline{n}}$; scegliendo $k = \overline{n}+1$, abbiamo $a_{\overline{n}+2} \leq (L+\varepsilon)\, a_{\overline{n}+1} \leq (L+\varepsilon)^2\, a_{\overline{n}}$; iterando, si ottiene per induzione

$$a_{\overline{n}+m} \leq (L+\varepsilon)^m\, a_{\overline{n}}\,, \qquad \forall m \geq 1\,,$$

da cui segue la tesi per il criterio del confronto, dato che la serie geometrica di termine generico $(L+\varepsilon)^m\, a_{\overline{n}}$ converge essendo $L + \varepsilon < 1$.

Se, invece, il *limite* del rapporto è strettamente maggiore di 1, allora, scegliendo $\varepsilon > 0$ tale che $L - \varepsilon > 1$, esiste $\overline{k}$ tale che $k \geq \overline{k}$ implica

$$a_{k+1} \geq (L-\varepsilon)\, a_k\,.$$

Iterando questa relazione a partire da $\overline{k}$, si trova

$$a_{\overline{k}+m} \geq (L-\varepsilon)^m\, a_{\overline{k}}\,, \qquad \forall m \geq 1\,.$$

Dato che $(L-\varepsilon)^m$ diverge quando m diverge, la serie di termine generico a_k diverge dato che il termine generico non è infinitesimo.

Criterio della radice. Come nel caso precedente, se $0 \leq L < 1$, fissato $\varepsilon > 0$ tale che $L + \varepsilon < 1$, sia $\overline{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \overline{n} \quad \Longrightarrow \quad \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} \leq L + \varepsilon\,.$$

Da questa relazione (e dalla definizione di estremo superiore) segue immediatamente che

$$k \geq \overline{n} \quad \Longrightarrow \quad a_k \leq (L + \varepsilon)^k\,,$$

da cui la tesi, avendo maggiorato con il termine generico di una serie geometrica convergente. Se, invece, $L > 1$, sia $\varepsilon > 0$ tale che $L - 2\varepsilon > 1$; per definizione di limite superiore, esiste $\overline{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che $n \geq \overline{n}$ implica

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} \geq L - \varepsilon\,.$$

Fissato $n = \overline{n}$, esiste $k_1 \geq \overline{n}$ in $\mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[k_1]{a_{k_1}} \geq L - 2\varepsilon\,,$$

e k_1 è il minimo intero maggiore di $\overline{n}$ con queste proprietà. Fissato $n = k_1 + 1$, esiste $k_2 > k_1$ tale che

$$\sqrt[k_2]{a_{k_2}} \geq L - 2\varepsilon\,,$$

e k_2 è il minimo intero con queste proprietà. Continuando, possiamo costruire una sottosuccessione $\{a_{k_h}\}$ tale che

$$\sqrt[k_h]{a_{k_h}} \geq L - 2\varepsilon\,, \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{k_h} \geq (L - 2\varepsilon)^{k_h}\,.$$

Essendo $L - 2\varepsilon > 1$, si ha

$$\lim_{h \to +\infty} a_{k_h} = +\infty\,,$$

cosicché la condizione necessaria per la convergenza della serie è violata, e dunque la serie di termine generico a_k diverge.

Criterio di Cauchy. Sia h in $\mathbb{N} \cup \{0\}$ fissato; dal momento che a_k è decrescente, si ha

$$a_{2^{h+1}} \leq a_i \leq a_{2^h}\,, \qquad \forall i = 2^h + 1, \ldots, 2^{h+1}\,.$$

Pertanto,

$$\frac{1}{2} 2^{h+1} a_{2^{h+1}} = 2^h a_{2^{h+1}} = \sum_{i=2^h+1}^{2^{h+1}} a_{2^{h+1}} \leq \sum_{i=2^h+1}^{2^{h+1}} a_i \leq \sum_{i=2^h+1}^{2^{h+1}} a_{2^h} = 2^h\, a_{2^h}\,.$$

Sommando per h da 0 ad n, troviamo

$$\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n+1} 2^h a_{2^h} = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{n} 2^{h+1} a_{2^{h+1}} \leq \sum_{h=0}^{n} \sum_{i=2^h+1}^{2^{h+1}} a_i = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} a_k \leq \sum_{h=0}^{n} 2^h\, a_{2^h}\,.$$

È chiaro che la prima e l'ultima serie o convergono entrambe, o divergono entrambe; pertanto, la successione

$$n \mapsto \sum_{k=1}^{2^{n+1}} a_k\,,$$

che è una sottosuccessione estratta da

$$n \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \,,$$

converge se e solo se converge la serie di termine generico $2^h\, a_{2^h}$. Usando la convergenza (o divergenza) della sottosuccessione unitamente alla monotonia della successione delle somme parziali, si ha che la serie di termine generico a_k converge se e solo se converge la serie di termine generico $2^k\, a_{2^k}$, come volevasi dimostrare.

Criterio di Leibniz. Studiamo il comportamento delle somme parziali di indice pari e di indice dispari. Abbiamo

$$S_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k\, b_k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k\, b_k - b_{2n+1} + b_{2n+2} \leq S_{2n} \,,$$

avendo usato il fatto che, per ipotesi, $b_{2n+1} \geq b_{2n+2}$; d'altra parte,

$$S_{2n+3} = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k\, b_k = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k\, b_k + b_{2n+2} - b_{2n+3} \geq S_{2n+1} \,,$$

sempre usando la monotonia di b_k. Abbiamo così dimostrato che la sottosuccessione S_{2n} è decrescente, mentre la sottosuccessione S_{2n+1} è crescente. Inoltre,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}\, b_{2n+1} \leq 0 \,,$$

e quindi $S_{2n+1} \leq S_{2n}$, qualsiasi sia n. Pertanto,

$$S_1 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq \ldots \leq S_4 \leq S_2 \,.$$

Questa catena di disuguaglianze implica che S_{2n} è decrescente e limitata dal basso (da S_1), e che S_{2n+1} è crescente e limitata dall'alto (da S_2). Esistono allora S_{p} e S_{d} in $\mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S_{\mathrm{p}} \,, \qquad \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S_{\mathrm{d}} \,.$$

Ricordando che $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^n\, b_n$, ed usando il fatto che b_n tende a zero, si ha

$$S_{\mathrm{d}} - S_{\mathrm{p}} = \lim_{n\to+\infty} [S_{2n+1} - S_{2n}] = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n\, b_n = 0 \,,$$

da cui $S_{\mathrm{d}} = S_{\mathrm{p}}$; definendo S il valore comune, dal momento che si ha

$$|S_n - S| \leq |S_{n+1} - S_n| = b_{n+1} \,, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,,$$

il fatto che b_n tende a zero implica che S_n tende ad S, e quindi che la serie converge.

6.1. **Serie e integrali impropri.** Iniziamo questo paragrafo ricordando le ipotesi fondamentali affinché sia definito[12] l'integrale secondo Riemann: la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deve essere a) limitata e b) definita su un insieme A limitato. Se, infatti, una delle due ipotesi viene a cadere, non sono più ben definite le somme parziali (inferiori, superiori, o entrambe). Se, infatti, f è (ad esempio) illimitata superiormente, per ogni partizione esiste almeno un intervallo in cui l'estremo superiore di f vale $+\infty$, e quindi le corrispondenti somme superiori valgono $+\infty$ (ovvero: non sono definite). Se, invece,

[12] Nel senso di: "si possa iniziare a parlare di..."

l'insieme di definizione della funzione f non è limitato, esiste almeno un intervallo della partizione che ha lunghezza infinita e — di nuovo — le somme (inferiori o superiori) non sono ben definite[13].

Che fare, quindi, quando si ha a che fare con funzioni illimitate, o definite su un insieme illimitato? In questo caso, è d'aiuto il concetto di integrale improprio. Vediamo alcuni casi.

- La funzione $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann su (a, b) per ogni $b > a$; si può allora definire la funzione
$$b \mapsto \int_a^b f(x)\, dx\,,$$
e definire l'*integrale improprio* di f su $(a, +\infty)$ come il limite (se esiste finito)
$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx\,.$$
Una funzione per cui tale limite esista finito si dice integrabile in senso improprio su $(a, +\infty)$.
- la funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è illimitata in un intorno destro di $x = a$ ed è integrabile secondo Riemann su $(a + \varepsilon, b)$, per ogni $\varepsilon > 0$. Si può allora definire la funzione
$$\varepsilon \mapsto \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx\,,$$
e definire l'*integrale improprio* di f su (a, b) come il limite (se esiste finito)
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx\,.$$
Analoga definizione si può dare se f è illimitata in un intorno sinistro di b, ed integrabile secondo Riemann su $(a, b-\varepsilon)$, per ogni $\varepsilon > 0$; in questo caso (sempre se il limite esiste finito),
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx\,.$$
- Che succede se vogliamo integrare una funzione su tutto $\mathbb{R}$? In questo caso, sempre supponendo che f sia integrabile secondo Riemann su (a, b), qualsiasi siano $a < b$ in $\mathbb{R}$, possiamo definire l'integrale improprio in diversi modi (che danno tutti lo stesso risultato, qualora i limiti siano finiti):
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \Big(\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx \Big)\,,$$
oppure
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \Big(\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx \Big)\,,$$

[13] Sicuri che sia "illimitato" il concetto corretto, o è solo una semplificazione per non farvici pensare?

oppure, fissato un qualsiasi c in $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Analogamente, se la funzione f definita su (a,b) è illimitata sia in a che in b, ma integrabile appena ci "allontaniamo" sia da a che da b, possiamo definire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0^+}\Big(\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\Big)\,,$$

oppure

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big(\lim_{\delta\to0^+}\int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\Big)\,,$$

oppure, fissato c in (a,b)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,.$$

Infine, se $f : (a,b)\setminus\{c\}$ è illimitata in un intorno di c (ed integrabile in (a,b) privato di un intorno arbitrario di c), abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{c-\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Osservazione 6.8. Ci si potrebbe chiedere, per gli integrali su tutto $\mathbb{R}$ (ed analogamente per quelli di funzioni illimitate nell'intorno di più punti), perché ricorrere ad una definizione così complicata, "spezzando" i limiti (o gli integrali). Il problema nel definire, ad esempio,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx\,,$$

è che il valore così ottenuto può — ad esempio — non essere lo stesso dato da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{2b} f(x)\,dx\,.$$

Per capire perché, consideriamo la funzione $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; la funzione è dispari, per cui

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0\,, \qquad \forall b>0\,,$$

mentre, essendo $\log(1+x^2)$ una primitiva di f,

$$\int_{-b}^{2b} f(x)\,dx = \log(1+x^2)\Big|_{x=-b}^{x=2b} = \log\Big(\frac{1+4b^2}{1+b^2}\Big)\,,$$

cosicché

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{2b} f(x)\,dx = \log(4)\neq 0\,.$$

Pertanto, il limite (ovvero, il valore dell'integrale) dipende dalla scelta degli estremi di integrazione, cosa che chiaramente non può essere: se avessimo scelto come intervallo di integrazione $(-2b,b)$, avremmo ottenuto come risultato $-\log(4)$, e se avessimo scelto

$(-b,3b)$, avremmo ottenuto $\log(9)$. Eseguendo prima un limite, e poi l'altro (o spezzando l'integrale in due) si ottiene invece il risultato "corretto", secondo il quale l'integrale su $\mathbb{R}$ di $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ non esiste.

Analogo risultato si ottiene se, per esempio, calcoliamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\Big)\,,$$

che vale zero, o lo stesso limite integrando su $(-1,-\varepsilon)\cup(2\varepsilon,1)$, che vale $\log(2)$. Se, invece, calcoliamo i due limiti separatamente, abbiamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log(|x|)\big|_{x=-1}^{x=-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log(\varepsilon)=-\infty\,,$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log(|x|)\big|_{x=\varepsilon}^{x=1}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}-\log(\varepsilon)=+\infty\,,$$

dando luogo alla forma indeterminata "$\infty-\infty$", che ci dice che l'integrale improprio di $f(x)=\frac{1}{x}$ su $(-1,1)$ non esiste; esistono, e valgono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$, gli integrali impropri di $f(x)=\frac{1}{x}$ su $(0,1)$, e su $(-1,0)$.

Nonostante quanto detto sopra, però, alle volte può essere utile dare un significato ad integrali di funzioni il cui integrale improprio sia indefinito. Si parla, in questi casi, di **valore principale**, indicato con **vp**, dell'integrale[(14)]; ad esempio,

$$\mathbf{vp}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}0=0\,,$$

e

$$\mathbf{vp}-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\Big)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}0=0\,.$$

Come si vede, il valore principale è definito prendendo valori simmetrici per gli estremi, cosicché ogni funzione dispari, limitata o no, definita su un limitato o no, ha il valore principale dell'integrale pari a zero (se calcolato su un insieme simmetrico rispetto all'origine).

Si noti che se, ad esempio, scegliamo $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$, allora

$$\mathbf{vp}-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=4=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\,,$$

dove l'ultimo è l'integrale improprio, convergente, definito facendo i limiti "uno alla volta", mentre se $f(x)=\frac{1}{x^2}$, allora

$$\mathbf{vp}-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=+\infty=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\,,$$

a destra essendo nuovamente l'integrale improprio (questa volta non convergente).

(14) È un concetto differente dal concetto di integrale improprio, anche se coincide con il valore dell'integrale improprio quando questo è definito.

Osservazione 6.9. Supponiamo ora di dover calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx\,,$$

di una funzione integrabile su $(1,b)$ per ogni $b>1$. Eseguendo il cambio di variabile $y=\frac{1}{x}$, abbiamo

$$\int_1^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{f(1/y)}{y^2}\,dy\,,$$

cosicché l'integrale improprio di f su $(1,+\infty)$ può essere calcolato calcolando l'integrale improprio di $g(y)=\frac{f(y)}{y^2}$ su $(0,1)$. Analogamente, e con lo stesso cambio di variabile (ponendo $b=\frac{1}{\varepsilon}$),

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{f(1/y)}{y^2}\,dx\,.$$

In altre parole, con opportuni cambi di variabile, un integrale improprio su un intervallo illimitato può essere trasformato in un integrale improprio su un intervallo limitato (di una funzione differente...).

Per gli integrali impropri valgono dei criteri "stranamente" simili a quelli per le serie:

- si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha<1,\\ +\infty & \text{se } \alpha\ge1,\end{cases}$$

  e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha>1,\\ +\infty & \text{se } \alpha\le1.\end{cases}$$

  Ognuno dei due risultati precedenti può essere ricavato dall'altro con la sostituzione $y=\frac{1}{x}$. Si noti che, in particolare, non esiste nessuna potenza negativa di x integrabile in senso improprio su $(0,+\infty)$;
- **criterio del confronto:** siano $0\le f(x)\le g(x)$ per x in A; se g è integrabile in senso improprio su A, lo è anche f, e se f non è integrabile in senso improprio su A, non lo è nemmeno g;
- **criterio del confronto asintotico:** siano $f(x)\ge0$ e $g(x)\ge0$, e sia a in $\mathbb{R}$ tale che sia f che g sono illimitate in un intorno di a (che può essere anche solo un intorno sinistro o destro). Se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,+\infty)\,,$$

  allora f è integrabile in senso improprio "vicino ad a" se e solo se lo è g. Analogo risultato vale se $a=\pm\infty$.
- **integrabilità assoluta:** se f è di segno qualsiasi, e $|f|$ è integrabile in senso improprio su A, allora f è integrabile in senso improprio su A.

I criteri precedenti, e i risultati di integrabilità all'infinito di $\frac{1}{x^\alpha}$ sono sostanzialmente identici a quelli validi per le serie. Questa identità è rafforzata dal seguente risultato.

Teorema 6.10. *Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente (quindi integrabile su $[0,a]$ per ogni $a > 0$); allora*

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) < +\infty\,.$$

Dimostrazione. Sia n in $\mathbb{N}$ fissato, e scriviamo

$$[0,n] = \bigcup_{k=1}^{n} [k-1,k]\,.$$

Per le proprietà dell'integrale,

$$\int_0^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\,.$$

Essendo f decrescente, si ha

$$f(k) \le f(x) \le f(k-1)\,, \qquad \forall x \in [k-1,k]\,,$$

e quindi, integrando,

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le f(k-1)\,.$$

Sommando per k da 1 ad n si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \le \int_0^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)\,,$$

e passando al limite per n tendente ad infinito, si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \le \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \le f(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)\,,$$

da cui segue immediatamente la tesi. □

Come applicazione del teorema precedente, possiamo dedurre, dal saper calcolare l'integrale improprio di $\frac{1}{x^\alpha}$, la convergenza, o la divergenza, della serie armonica generalizzata.

Esempio 6.11. Come ulteriore esempio di collegamento tra serie ed integrali impropri, dimostriamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx < +\infty\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx = +\infty\,.$$

Sia n in $\mathbb{N}$ fissato, e calcoliamo

$$\int_0^{n\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx\,.$$

Scrivendo $[0,n\pi]$ come unione di $[(k-1)\pi, k\pi]$ al variare di k tra 1 ed n, abbiamo

$$\int_0^{n\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Osserviamo ora che se k è dispari, la funzione $\mathrm{sen}(x)$ è positiva su $[(k-1)\pi, k\pi]$, mentre è negativa se k è pari. Se ne deduce che a_k è positivo per k dispari, e negativo se k è pari, cosicché

$$a_k = (-1)^{k-1}\, b_k\,, \qquad b_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\,\mathrm{sen}(x)|}{x}\, dx\,.$$

Ricordando che $|\,\mathrm{sen}(x)|$ è periodica di periodo π, ed effettuando la sostituzione $y = x - \pi$, abbiamo

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\,\mathrm{sen}(x)|}{x}\, dx = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(y+\pi)|}{y+\pi}\, dy \\ &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(y)|}{y+\pi}\, dy \le \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(y)|}{y}\, dy = b_k\,, \end{aligned}$$

cosicché la successione b_k è decrescente; inoltre, ricordando che $|\,\mathrm{sen}(x)| \le 1$,

$$0 \le b_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\,\mathrm{sen}(x)|}{x}\, dx \le \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{k}{k-1}\right),$$

e quindi

$$\lim_{k\to+\infty} b_k = \log(1) = 0\,.$$

Abbiamo così dimostrato che la successione b_k è non negativa, decrescente ed infinitesima; per il criterio di Leibniz, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k\, b_k \qquad \text{è convergente,}$$

e quindi lo è anche la serie di termine generico $(-1)^{k-1}\, b_k$, cioè la serie di termine generico a_k. Si ha dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty\,,$$

come volevasi dimostrare.

Dimostriamo ora che l'integrale improprio di $\frac{|\,\mathrm{sen}(x)|}{x}$ diverge; ragionando come prima, essendo

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\,\mathrm{sen}(x)|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} b_k\,,$$

è sufficiente dimostrare che la serie di termine generico b_k diverge. Per farlo, osserviamo che, essendo $|\,\mathrm{sen}(x)| \ge \frac{1}{2}$ se x appartiene a $[(k-1)\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi - \frac{\pi}{6}]$, si ha

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\,\mathrm{sen}(x)|}{x}\, dx \ge \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{6}}^{k\pi-\frac{\pi}{6}} \frac{|\,\mathrm{sen}(x)|}{x}\, dx \\ &\ge \frac{1}{2} \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{6}}^{k\pi-\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{k-\frac{1}{6}}{k-\frac{5}{6}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{4}{6k-5}\right). \end{aligned}$$

Ora, la serie di termine generico $\log(1 + \frac{4}{6k-5})$ si comporta, per il criterio del confronto asintotico (ed il limite notevole del logaritmo), come la serie di termine generico $\frac{1}{6k-5}$, che diverge essendo sostanzialmente la serie armonica. Pertanto, b_k è più grande del termine generico di una serie divergente, e quindi la serie di termine generico b_k diverge, come volevasi dimostrare.