ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1

Serie di Fourier

(1) Sia $f(x) = e^{3x-[3x]}$. Determinare il periodo della funzione f. Determinare una base di funzioni trigonometriche per le quali è possibile scrivere lo sviluppo di Taylor della funzione.

(2) Sia $S(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Scrivere la serie S in termini della serie costruita sulle funzioni $\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$.

(3) Calcolare la serie di Fourier della funzione $f(x) = |\sin x|$.

(4) Calcolare la serie di Fourier della funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \\ 0 & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ -1 & x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

(5) Sia f una funzione 2π periodica e m volte derivabile con derivata continua. Dimostrare che converge la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^{\frac{2}{m+1}},$$

dove gli a_k sono i coefficienti delle funzioni coseno nella serie di Fourier di f.

(6) Sia $P_m(x)$ e $Q_m(x)$ due successioni di polinomi trigonometrici definiti per induzione: $P_o = Q_o = 1$ e

$$P_{m+1}(x) = P_m(x) + e^{i2^m t} Q_m(x)$$
$$Q_{m+1}(x) = P_m(x) - e^{i2^m t} Q_m(x)$$

a) Calcolare P_1, Q_1, P_2, Q_2.

b) Dimostrare che $|P_{m+1}(x)|^2 + |Q_{m+1}(x)|^2 = 2|P_m(x)|^2 + |Q_m(x)|^2$ e dedurne che

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |P_m(x)| \leq 2^{\frac{m+1}{2}}.$$

c) Dimostrare che per $n \geq 2^m$, $\hat{P_m}(n) = 0$ ($\hat{P_m}(n)$ indica l'ennesimo coefficiente di Fourier della funzione P_m). Inoltre per $n < 2^m$, $\hat{P_{m+1}}(n) = \hat{P_m}(n)$, se ne deduca che

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^{2m-1} \epsilon_n e^{inx}, \text{ con } \epsilon_n = \pm 1$$

Osservazione La funzione $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-m}(P_m(x) - P_{m-1}(x))$ è un esempio di funzione continua la cui serie di Fourier non converge assolutamente.

Date: May 13, 2016.