ANALISI II, 11/02/2014

Esercizio 1 *La funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *è definita da* $f(x, y, z) = e^{|x-y|}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. *determinare l'insieme dei punti critici di* f *su* $\mathbb{R}^3$ Si osservi che $f_z = e^{|x-y|}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, per cui i punti critici verificano $z = 0$. Si ottiene:

$$f_x(x, y, 0) = e^{|x-y|}\begin{pmatrix} (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2}) & x > y \\ (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2}) & x < y \end{pmatrix}$$

$$f_y(x, y, 0) = e^{|x-y|}\begin{pmatrix} (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2}) & x > y \\ (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2}) & x < y \end{pmatrix}$$

   Quindi nei punti critici $x = -y$. Se $y < 0$ allora $x > 0$ e dunque $x > y$. Ma in quel caso $x = -(x^2 + y^2) \leq 0$ e questa è una contraddizione.

   Viceversa se $y > 0$ allora $x < 0$ e dunque $x < y$, ma in quel caso $y = -(x^2 + y^2) \leq 0$ e questa è una contraddizione. Inoltre f non è derivabile in $(0, 0, 0)$.

   Dunque non ci sono punti critici.

2. *calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di* f *sull'insieme*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

   Siccome $f \geq 0$ e $f(0, 0, 0) = 0$, l'estremo inferiore è 0 ed è raggiunto in $(0, 0, 0)$. D'altra parte la funzione è illimitata e dunque l'estremo superiore è $+\infty$.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale triplo*

$$\int_T \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dx\, dy\, dz$$

dove $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D; 0 \leq z \leq 1\}$ *e* D *è il trapezio nel piano* (x, y) *avente vertici nei punti* $(1, 0), (2, 0), (0, 2), (0, 1)$.

$$\begin{aligned}\int_T \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dx\, dy\, dz &= \int_0^1 (\int_D \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dx\, dy)dz \\ = \int_D \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dx\, dy\end{aligned}$$

Si osservi che, considerando il cambiamento di variabili: $u = y - x$, $v = y + x$, il dominio D si esprime $D_{u,v} = \{1 \leq v \leq 2,\ -v \leq u \leq v\}$, quindi tenendo conto dello Jacobiano otteniamo

$$\begin{aligned}\int_D \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dx\, dy &= \int_1^2 \int_{-v}^{v} \cos(\frac{u}{v})\frac{1}{2}dudv = \\ \frac{1}{2}\int_1^2 2\sin(1)vdv &= \frac{\sin 1}{2}(4 - 1)\end{aligned}$$

Esercizio 3 *Si consideri la funzione di due variabili:*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1|x_2|}{\max[|x_1|;|x_2|]} & se\ (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$, e la derivabilità e differenziabilità di f in $(0,0)$. Per punti diversi da $(0,0)$, la funzione è composizione di funzioni continue, perci studiamo la continuità nell'origine. Siccome $|f(x_1, x_2)| \leq \frac{\max[|x_1|;|x_2|]|x_2|}{\max[|x_1|;|x_2|]} \leq |x_2| \leq |(x_1, x_2)|$, che implica la continuità .

D'altra parte $f(x_1, 0) = 0$ per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$ e $f(0, x_2) = 0$ per ogni $x_2 \in \mathbb{R}$. Si ha dunque $\partial_{x_1} f(x_1, 0) = 0$ e $\partial_{x_2} f(0, x_2) = 0$. Quindi in particolare f è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Controlliamo la differenziabilità , cioè dobbiamo vedere se

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h_1, h_2)\rangle}{|(h_1, h_2)|} = 0.$$

Si osservi che il rapporto si riduce a $\frac{f(h_1,h_2)}{|(h_1,h_2)|}$ e che, se verifichiamo il limite lungo la retta $h_1 = h_2$ si ottiene $\lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1}{\sqrt{2h_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$. f non è differenziabile in $(0,0)$.

In alternative si può osservare che $f(t,t) = t$ e quindi, per $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ si ha

$$\partial_v f(0,0) = 1 \neq \langle \nabla f(0,0), v\rangle = 0,$$

ora se f fosse differenziabile nell'origine si avrebbe l'uguaglianza.

Esercizio 4 *Sia F il campo vettoriale piano definito da*

$$F(x,y) = (\frac{-2y}{(x-y)^2 + (x+y)^2}, \frac{2x}{(x-y)^2 + (x+y)^2}).$$

Determinare il dominio di esistenza di F. Determinare se è conservativo nel suo campo di esistenza. Calcolare il lavoro di F lungo il cerchio di centro $(3,0)$ e raggio 1.

Il campo di esistenza di F è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. In esso si ha che $\partial_x(\frac{2x}{(x-y)^2+(x+y)^2}) = \partial_y(\frac{-2y}{(x-y)^2+(x+y)^2})$, quindi il campo è conservativo in qualsiasi insieme semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, d'altra parte $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ e il lavoro lungo il cerchio unitario centrato nell'origine è $2\pi \neq 0$ quindi F non è conservativo nel dominio.

Tuttavia il lavoro di F lungo il cerchio di centro $(3,0)$ e raggio 1 è nullo perchè la curva è contenuta in $x > 0$ che è un sotto insieme semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Esercizio 5 *Sia C la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(3t))$ per $t \in [0, 2\pi]$. Verificare che la curva è chiusa ma non è semplice. Dimostrare che L, la lunghezza di γ, verifica $L \leq 2\pi\sqrt{13}$. Osservato che i punti $(1, 0)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ appartengono a C, determinare una limitazione inferiore strettamente positiva per il valore di L.*

$\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi)$ e dunque la curva è chiusa; d'altra parte anche $\gamma(\pi) = (1, 0)$ e dunque la curva non è semplice.

Siccome la curva è regolare a tratti, $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(\sin(2t))^2 + 9(\cos(2t))^2} dt$ e sfruttando che il coseno e il seno sono in modulo limitate da 1, si ottiene $L \leq 2\pi\sqrt{13}$.

D'altra parte per definizione di lunghezza di una curva si ha che $L \geq \sum_{k=0}^{3} |\gamma(\frac{(k+1)\pi}{2}) - \gamma(\frac{(k+1)\pi}{2})|$. Abbiamo già visto che $\gamma(0) = \gamma(\pi) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$ ma $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (-1, -1)$ e $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (-1, 1)$. Dunque $L \geq 2\sqrt{4 + 1} + 2\sqrt{4 + 1} = 4\sqrt{5}$.