ANALISI II 21 GENNAIO 2014

Esercizio 1 *Considerare la funzione:* $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-y^4}{x^2+y^2}$

(a) studiare limitatezza e omogeneità di f *su* $\mathbb{R}^2$

$f(x,y) = 1 - \frac{y^4}{x^2+y^2} \leq 0$, quindi è limitata dall'alto, mentre non è limitata dal basso dato che per esempio

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = \lim_{y\to+\infty} -y^2 = -\infty.$$

Inoltre f non è omogenea dato che $f(tx,ty) = 1 - t^2\frac{y^4}{x^2+y^2} \neq t^\alpha f(x,y)$.

(b) f *è prolungabile con continuità in* $(0,0)$ *?*

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ dato che $|f(x,y)-1| = \frac{y^4}{x^2+y^2} \leq |x^2+y^2|$, quindi $\forall\ \epsilon > 0$ se $|(x,y) \leq \sqrt{\epsilon}$ si ha che $|f(x,y)-1| \leq \epsilon$.

(c) studiare la differenziabilità della funzione prolungata

Siccome, per f prolungata si ha $f(x,0) = 1$, per definizione $\partial_x f(x,0) = 0$, inoltre $f(0,y) = 1-y^2$ e dunque $\partial_y f(0,y) = -2y$ se ne deduce che $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Per verificare se f è differenziabile si studia

$$\lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - <\nabla f(0,0),(h_1,h_2)>}{|h|} = \lim_{h=(h_1,h_2)\to(0,0)} -\frac{h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = 0.$$

Infatti $|-\frac{h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}| \leq |h|$.

(d) (Facoltativo) Considerare l'insieme di livello $\{f(x,y) = 1/2\}$ *e determinare se in un intorno del punto* $(0,\sqrt{1/2})$ *è il grafico di una funzione.*

Esercizio 2 *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = (\log y + y/x\,,\ x + \log x + x/y)$$

(i) determinare se il suo insieme di definizione è stellato,

Il dominio di F è $D = \{x > 0, y > 0\}$, sia $P_1 = (x_1,y_1) \in D$ e $P_2 = (x_2,y_2) \in D$ allora, per $t \in [0,1]$, $tP_1 + (1-t)P_2 = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2)$ ha tutte e due le coordinate positive e pertanto è in D. Quindi D è convesso e dunque stellato. *(ii) calcolare il suo integrale curvilineo sulla curva*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]\}$$

La curva è costituita da due pezzi di ellisse, uno dei quali fuori dal dominio di F. Quindi consideriamo $\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t)$ per $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.Il campo vettoriale è la somma di un campo irrotazionale $G(x,y) = (\log y + y/x\,,\, \log x + x/y)$ e uno $H(x,y) = (0,x)$ che non lo è . Siccome il dominio è stellato G ha un potenziale in D dato da $f(x,y) = x\log y + y\log x$.

Dunque

$$\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy = f(\gamma(\frac{\pi}{3})) - f(\gamma(\frac{\pi}{6})) + \int_\gamma H_1 dx + H_2 dy = f(\gamma(\frac{\pi}{3})) - f(\gamma(\frac{\pi}{6})) + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2(\cos t)^2 dt.....$$

Esercizio 3 *Per quali valori reali di $p \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = |x - y^2|^p$ è integrabile secondo Lebesgue su $[-1,1] \times [-1,1]$?*

Per $p \geq 0$ la funzione è continua e dunque, in particolare, integrabile in un quadrato. Per $p < 0$, la funzione è singolare in $x = y^2$ e basta studiare per esempio $\{x \leq y^2\} \cap [-1,1] \times [-1,1]$ l'altra parte del dominio si tratterà in modo analogo. In particolare studiamo

$$\int_{\{x \leq y^2 - \epsilon\} \cap [-1,1]\times[-1,1]} (y^2 - x)^p dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{y^2-\epsilon} (y^2 - x)^p dxdy =$$

$$= \frac{1}{p+1} (\int_{-1}^{1} \epsilon^{p+1} dy - \int_{-1}^{1} (y^2+1)^{p+1} dy)$$

che è limitato per $p + 1 > 0$. Quindi f è misurabile per $p > -1$.

Con ragionamenti analoghi si mostra che per $p = -1$, f non è misurabile e dunque, per monotonia, non lo è per ogni $p \leq -1$.

Esercizio 4 *Considerare la funzione f definita per $x \in \mathbb{R}^n$ da*

$$f(x) = \Big(< Ax, x > -1 \Big)^2$$

con A semidefinita positiva.
(i) calcolare gradiente ed Hessiano di f
Possiamo considerare che A è simmetrica, dato che altrimenti considerando $\frac{(A+A^T)}{2}$ si ottiene la stessa funzione. Dunque $\nabla f(x) = 2\Big(< Ax, x > -1 \Big)(A + A^T)x = 4\Big(< Ax, x > -1 \Big)(Ax)$. Per $D^2 f(x) = 4\Big(< Ax, x > -1 \Big)A + 4Ax \otimes Ax$.
(ii) determinare i punti critici di f
Si ottiene $\nabla f(x) = 0$, per x tale che $\Big(< Ax, x > -1 \Big) = 0$ e x tale che $Ax = 0$ cioè $x \in \mathrm{Ker} A$.
(iii) classificare i punti critici di f supponendo A definita positiva.
Se x è tale che $\Big(< Ax, x > -1 \Big) = 0$ allora $f(x) = 0$ ma f è positiva e dunque si tratta di punti di minimo dato che la funzione è non negativa. D'altra parte, A è definita positiva $Ker A = \{0\}$ e $< Ax, x > > 0$ e dunque in un intorno di zero, $f(x) = \Big(1 - < Ax, x > \Big)^2 \leq 1 = f(0)$ e dunque si tratta di un massimo locale.

Esercizio 5 *Si consideri la superficie* $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}, z = x^2 + y^2, z \leq x\}$. *Calcolare* A *l'area di* Σ *eventualmente in termini della funzione ellittica* $E(x) = \int_0^x (1 + 4\cos^2 t)^{3/2} dt$. *Dimostrare che* $A \leq (5\sqrt{5} - 1)/12\pi$. $(x,y,z) \in \Sigma$ implica che $x^2 + y^2 \leq x$ e dunque (x,y) è nel disco di centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$, $B_{\frac{1}{2}}((1/2,0))$.

Si ottiene dunque che, per $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$A = \int_{B_{\frac{1}{2}}((1/2,0))} \sqrt{1 + \partial_x f^2 + \partial_y f^2} dxdy = \int_{B_{\frac{1}{2}}((1/2,0))} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$$

cioè usando le coordinate polari, il disco diventa $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\rho \leq \cos\theta$:

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{12} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta - \frac{\pi}{12} = \frac{1}{12}(E(\pi) - \pi).$$

Si osservi che se si ottiene anche, dato che $\cos^2\theta \leq 1$, $A \leq \frac{(5\sqrt{5}-1)}{12}\pi$