CURVE

Esercizio 1

- *Sia* $C = r(I)$ *una curva continua in* $\mathbb{R}^2$. *Dimostrare che se* I *è un intervallo chiuso e limitato allora* C *è un insieme limitato di* $\mathbb{R}^2$*;*
- *Dare esempi di curve parametrizzate da intervalli* I *illimitati e contenute in un insieme limitato;*
- *Sia* $C = r([0, 2\pi])$ *con* $r(t) = (\cos t\,,\, e^{-t^2})$*; dimostrare che* C *è contenuta nel rettangolo* $R = [-1, 1] \times [0, 1]$ *e determinare i punti di* C *più lontani dall'origine.*

Esercizio 2 *Si denota con* $L(C)$ *la lunghezza di una curva* C.

- *Considerare per* $m \geq 0$ *la famiglia* (C_m) *di segmenti di retta definiti dalla parametrizzazione*

$$r(t) = (t, m\,t) \quad , \quad t \in [0, 1]$$

Calcolare $L(C_m)$ *per ogni* $m \geq 0$ *e poi* $\inf\{L(C_m); m \geq 0\}$ *e* $\sup\{L(C_m); m \geq 0\}$.

Esercizio 3 *Considerare il grafico della gaussiana* e^{-t^2} *sull'intervallo* $[-1, 1]$.
Dimostrare che la sua lunghezza L *verifica*

$$2 \leq L \leq \sqrt{20}$$

Esercizio 4 *Calcolare la lunghezza della curva parametrica*

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad , \quad t \in [0, 2]$$

Esercizio 5 *Discutere la validità della seguente affermazione:*
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni due curve C e C^* parametrizzate rispettivamente da r e r^* su $[0,1]$,

$$\max_{t\in[0,1]} ||r(t) - r^*(t)|| \leq \delta$$

implica

$$|L(C) - L(C^*)| \leq \varepsilon$$

.

Esercizio 6 *Fissata la distanza tra punti* $|P - Q|_\infty = \max\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|, |z_p - z_q|\}$. *Definiamo la lunghezza di una curva $\gamma = \varphi([a,b])$,*

$$L_\infty(\gamma) = \sup_D l_\infty(\Gamma_D)$$

dove $D = \{t_o = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b\}$, Γ_D è la poligonale che congiunge i punti $\varphi(t_i)$, e $l_\infty(\Gamma_D) = \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_\infty$.

- *Dimostrare che una curva regolare verifica $L_\infty(\gamma) < +\infty$.*
- *Per le curve regolari determinare l'espressione della lunghezza L_∞.*
- *Verificare che, se γ è rettificabile allora $L_\infty(\gamma) < +\infty$.*
- *Calcolare L_∞ della curva parametrizzata da $(r\cos t, r\sin t)$ per $t \in (0, 2\pi)$ con $r > 0$.*

Esercizio 7 *Dati P e Q in R^3, chiamiamo $\mathcal{C}_{PQ}$ l'insieme delle curve rettificabili di $\mathbb{R}^3$ che hanno per punto iniziale P e punto finale Q. Dimostrare che $\|P - Q\| = \inf_{\mathcal{C}_{PQ}} L(\gamma)$ (qui $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea.)*