Campi Vettoriali-Esercizi da Esami

Esercizio 1 *Considerare il campo vettoriale su* $\mathbb{R}^2$ *definito da* $F(x,y) = (\frac{2}{2x+y}, 1 + \frac{1}{2x+y})$. *Determinare l'insieme di definizione di* F. *Determinare se* F *è conservativa. Calcolare il lavoro di* F *lungo l'ellisse* $(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 1$ *percorsa in verso antiorario.*

Esercizio 2 *Considerare il campo vettoriale su* $\mathbb{R}^2$ *definito da* $F(x,y) = (e^{3x}\sin 3y, e^{3x}\cos 3y)$ *e l'insieme* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ *con* $0 < a < b < 1$.
Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\partial\Omega} F \cdot n\, ds$, *dove* $\partial\Omega$ *è la frontiera di* Ω *e* n *è la sua normale esterna.*

Esercizio 3 *Sia* $F(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. *Calcolare il lavoro di* F *lungo la curva parametrizzata da* $\gamma(t) = ((2+\cos(3t))\cos t, (2+\cos(3t))\sin t)$ *al variare di* $t \in [0, 2\pi]$. *Trovare una curva* γ *tale che il lavoro di* F *lungo* γ *valga 1.*

Esercizio 4 *Sia* F *il campo vettoriale piano definito da*

$$F(x,y) = (\frac{-2y}{(x-y)^2 + (x+y)^2}, \frac{2x}{(x-y)^2 + (x+y)^2}).$$

Determinare il dominio di esistenza di F. *Determinare se è conservativo nel suo campo di esistenza. Calcolare il lavoro di* F *lungo il cerchio di centro* $(3,0)$ *e raggio 1.*

Esercizio 5 *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = (\log y + y/x\, ,\ x + \log x + x/y)$$

(i) determinare se il suo insieme di definizione è stellato,
(ii) calcolare il suo integrale curvilineo sulla curva

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]\}$$

Esercizio 6 *Sia* Γ^+ *l'ellisse* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1\}$ *percorsa in verso antiorario ed* F *il campo vettoriale di componenti* $F_1(x,y) = xy$ *e* $F_2(x,y) = x^2 + y$. *Calcolare*

$$\int_{\Gamma^+} \langle F, \vec{n} \rangle dS \quad e \quad \int_{\Gamma^+} F_1 dx + F_2 dy.$$

Esercizio 7 *Sia* Ω *un aperto regolare di* $\mathbb{R}^N$*.S ia* f *una funzione continua in* Ω

- *Dimostrare che se* $\int_\Omega f(x)v(x)dx$ *per ogni funzione continua* v *allora* $f \equiv 0$ *in* Ω.
- *Dimostrare che se* $\int_\Omega f(x)\partial_{x_1} v(x)dx$ *per ogni* $v \in C^1(\Omega)$ *tale che il supporto di* v *è contenuto in* Ω *allora* f *è indipendente da* x_1.

Esercizio 8 *Sia* Ω *un aperto regolare di* $\mathbb{R}^N$. *Sia* A *una matrice* $N \times N$ *simmetrica tale che per* $\lambda > 0$, $A - \lambda I \geq 0$ *e siano* f *e* g *due funzioni continue in* $\mathbb{R}^N$. *Supponiamo che esiste* u *una funzione* $C^2(\overline{\Omega})$ *tale che* u *è soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathrm{div(A\nabla u(x)) = f(x)} & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- *Dimostrare che se* $f \equiv 0$ *allora* $\int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot \nu = 0$.
- *Dimostrare che per ogni* $v \in C^2(\Omega)$ *con* $v(x) = 0$ *per ogni* $x \in \partial\Omega$

$$\int_\Omega A\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

- *Dimostrare che se* v *è un altra soluzione dello stesso problema di Dirichlet allora* $u = v$ *in* Ω.