Analisi Matematica II- Birindelli, Capuzzo Dolcetta
a.a. 2013/2014 Seconda prova in itinere.

NOME e COGNOME: ....

Esercizio 1 *Per $n = 1, 2, ...,$ si denota con $[\frac{1}{n}, 1]_{\mathbb{Q}}$ l'insieme dei numeri razionali compresi tra $1/n$ e 1. Si consideri poi l'insieme $A_n = (0, \frac{1}{n}) \cup [\frac{1}{n}, 1]_{\mathbb{Q}}$.*

- *Determinare se A_n è misurabile secondo Lebesgue e, se lo è , calcolarne la misura.*

  Siccome A_n è l'unione di un aperto con un insieme numerabile di punti è misurabile e $|A_n| = |(0, \frac{1}{n})| = \frac{1}{n}$.

- *Calcolare la misura di $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.* Si osservi che $A = (0, 1]_{\mathbb{Q}}$. Infatti se $x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ allora $x \notin A_{[\frac{1}{x}]+1}$ e dunque $x \notin A$, mentre se $x \in (0, 1]_{\mathbb{Q}}$ allora $x \in A_n$ per ogni n. Dunque A è numerabile e $|A| = 0$.

- *Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $f_k(x) = [kx]$.*

  Calcolare $\int_{A_n} f_{n+1}(x)\, dx$. Si osservi che $\int_{A_n} f_{n+1}(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} [(n + 1)x]\, dx$. Ma $[(n+1)x] = 0$ per $x \in [0, \frac{1}{n+1})$ e $[(n+1)x] = 1$ per $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Abbiamo ottenuto che $\int_{A_n} f_{n+1}(x)\, dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Esercizio 2 *Sia Q il quadrato $[0, \pi] \times [0, \pi]$. Calcolare il minimo ed il massimo di*

$$f(x, y) = e^x \sin y \quad su \quad Q$$

La funzione è derivabile e $\nabla f(x, y) = e^x(\sin y, \cos y)$ che non si annulla mai, dunque f non ha punti critici, se ne deduce che i valori estremali di f sono raggiunti sul bordo del dominio.

$f(0, y) = \sin y$ che, per $y \in [0, \pi]$, ha massimo $f(0, \frac{\pi}{2}) = 1$ e minimo $f(0, 0) = 0$, similarmente $f(\pi, y) = e^\pi \sin y$ che, per $y \in [0, \pi]$ ha massimo $f(\pi, \frac{\pi}{2}) = e^\pi$ e minimo $f(\pi, 0) = 0$. Mentre $f(x, 0) = f(x, \pi) = 0$.

Abbiamo ottenuto $\max_Q f = f(\pi, \frac{\pi}{2}) = e^\pi$ e $\min_Q f = f(0, 0) = 0$.

In alternativa si poteva osservare che, per $y \in [0, \pi]$, $0 \le e^x \sin y \le e^x$. Ora e^x è una funzione monotona crescente quindi per $x \in [0, \pi]$, $1 \le e^x \le e^\pi$. Dunque $\min_Q f(x, y) = 0 = f(0, y)$, $\max_Q f(x, y) = e^\pi = f(\pi, \pi/2)$.

Esercizio 3 *Calcolare*

$$\int\int_P e^x \, dxdy$$

dove P è il quadrilatero di $\mathbb{R}^2$ di vertici $(1,1),(5,2),(4,7),(0,6)$

I lati del quadrilatero giacciono sulle rette $x-4y=-3$, $x-4y=-24$, $5x+y=6$, $5x+y=27$. Quindi se consideriamo la trasformazione $(u,v)=S(x,y)$ definita da $u=x-4y$ e $v=5x+y$, allora $S(P)=[-3,-24]\times[6,27]$. D'altra parte $(x,y)=S^{-1}(u,v)$ è data da $x=\frac{1}{21}(u-4v)$ e $y=\frac{1}{21}(-5u+v)$ e lo Jacobiano vale $\frac{1}{21}$.

Quindi

$$\begin{aligned}\int\int_P e^x\,dxdy &= \int\int_{[-24,-3]\times[6,27]} e^{\frac{1}{21}(u-4v)}\frac{1}{21}dudv\\ &= \frac{1}{21}\int_{-24}^{-3} e^{\frac{1}{21}u}du\int_6^{27} e^{\frac{-4}{21}v}dv\end{aligned}$$

Esercizio 4 *Sia* Γ^+ *l'ellisse* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1\}$ *percorsa in verso antiorario ed* F *il campo vettoriale di componenti* $F_1(x,y)=xy$ *e* $F_2(x,y)=x^2+y$. *Calcolare*

$$\int_{\Gamma^+}\langle F,\vec{n}\rangle dS \quad e \quad \int_{\Gamma^+} F_1dx+F_2dy.$$

Per il teorema della divergenza

$$\int_{\Gamma^+}\langle F,\vec{n}\rangle dS=\int_E \mathrm{div(F)dxdy}=\int_{\mathrm{E}}\mathrm{(y+1)dxdy}=\mathrm{|E|}=2\sqrt{3}\pi.$$

dato che y è dispari in E che è simmetrico rispetto all'asse x, e dunque $\int_E ydxdy=0$.

Per il teorema di Stokes:

$$\int_{\Gamma^+} F_1dx+F_2dy=\int_E(\partial_xF_2-\partial yF_1)dxdy=\int_E xdxdy=0$$

sempre per motivi di simmetria.