Esercizi vari secondo esonero

Esercizio 1 *Sia* $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$. *Calcolare l'area di* ∂E *e il volume di* E.

Esercizio 2 *Determinare l'area della superficie torica che si ottiene facendo ruotare intorno all'asse* z *il cerchio nel piano* x-z, *di centro* $(R,0,0)$ *e di raggio* r.

Esercizio 3 *Determinare se è esatta nel suo dominio di esistenza la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^4}dx - \frac{2xy}{x^2+y^4}dy.$$

Esercizio 4 *Determinare l'area della superficie piana racchiusa nella curva*

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \cos t \\ y(t) = \cos t \sin^2 t \end{cases}$$

Esercizio 5 *Determinare la funzione* $M(x,y)$ *tale che la forma*

$$\omega(x,y) = M(x,y)dx + e^{xy} \sin y dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$ *e* $M(x,0) = 0$.

Esercizio 6 *Sia* $y(x)$ *una soluzione dell'equazione differenziale*

$$y'(x) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

dove M *e* $N \neq 0$ *sono due funzioni* C^1.

- *Dimostrare che se* $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ *è una forma esatta e* F *è la sua primitiva allora* $F(x,y(x))$ *è costante.*

- *Trovare l'integrale generale dell'equazione* $y'(x) = -\frac{3x^2-y}{3y^2-x}$.

Esercizio 7 *Siano* $p > 1$ *e* $q > 1$ *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Siano* f *e* g *due funzioni tale che* $|f|^p$ *e* $|g|^q$ *sono misurabili su* E *insieme misurabile limitato di* R^N.

- *Dimostrare (disuguaglianza di Hölder) che* $\int_E f(x)g(x)dx \leq (\int f(x)^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int g(x)^q dx)^{\frac{1}{q}}$ *(usare la disuguaglianza di Young* $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$
- *Dimostrare che se anche* $|g|^p$ *è misurabili su* E

  $$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\int f(x)^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int g(x)^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

  (scrivere $|f(x) + g(x)|^p \leq |f|(|f(x) + g(x)|^{p-1}) + |g|(|f(x) + g(x)|^{p-1})$ *e usare la disuguaglianza di Hölder).*

Esercizio 8 *Sia* $\gamma_n(t) = \begin{cases} [2^n t]2^{-n} & t \in [0, n] \\ n & t > n. \end{cases}$ *dove* [] *indica la parte intera. E sia* f *una funzione misurabili su* E *insieme misurabile limitato di* R^N. *Dimostrare che* $\phi_n(x) = \gamma_n \circ f(x)$ *è una successione di funzioni elementari tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_n(x) = f(x) \ \ e \ \ \lim_{n\to+\infty} \int_E \phi_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Esercizio 9 *Determinare*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,n)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx.$$

Esercizio 10 *Determinare per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *è limitato l'integrale* $\int_E |y|^\alpha dxdy$ *dove* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| \leq |x|^2, |x| \leq 1\}$ *e per quali è limitato* $\int_E |x|^\alpha dxdy$.