FUNZIONI 2.

Esercizio 1 *Per* $x \neq 0$ *determinare il gradiente e la matrice Hessiana di* $f(x) = g(|x|)$ *dove* g *è una funzione due volte derivabile. Determinare gli autovalori e gli autovettori di* $D^2 f(x)$. *(Si ricorda che fissato* $x \in \mathbb{R}^n$ *non nullo, lo spazio ortogonale a* x *ha dimensione* $n-1$.*)*

Esercizio 2 *Determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine delle seguenti funzioni definite in* $\mathbb{R}^n$

- $f(x) = \sqrt{|x|+1}$ *in* $x = 0$
- $f(x) = e^{\langle x,\langle a}$ *con* $a \in \mathbb{R}^n$ *in* $x = 0$.

Esercizio 3 *Siano* f *e* g *due funzioni convesse in* A *aperto convesso di* $\mathbb{R}^n$.

- *Determinare delle condizioni su* $a \in \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *tali che* $h(\cdot) = af(\cdot) + bg(\cdot)$ *sia convessa.*
- *Determinare delle condizioni sulla matrice* $n \times n$ *costante* M *che implicano la convessità di* $h(x) = f(Mx)$.
- *Dimostrare che* $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ *è convessa.*

Esercizio 4 *Determinare per quali* $\alpha \geq 0$, $f(x) = |x|^\alpha$ *è convessa in* $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 5 *Data* f *funzione continua in* A *aperto di* $\mathbb{R}^n$. *Sia*

$$J^{1,-}f(x) = \{p \in \mathbb{R}^n;\ f(y) \geq f(x) + \langle p, (y-x)\rangle + o(|y-x|)\}.$$

1. *Dimostrare che se* f *è differenziabile in* x_o *allora* $J^{1,-}f(x_o) = \{\nabla f(x_o)\}$.
2. *Per* $f_1(x) = |x|$ *e* $f_2(x) = -|x|$ *determinare* $J^{1,-}f_1(0)$ *e* $J^{1,-}f_2(0)$.