FUNZIONI DI N VARIABILI 1.

Esercizio 1

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \frac{\prod_1^n x_i}{||x||^2}$$

- *verificare che* f *è limitata su* $B_1(0) \setminus \{0\}$ *dove* $B_1(0)$ *è la palla unitaria di centro l'origine.*
- *è possibile definire* f *in* $x = 0$ *in modo che la prolungata sia continua su tutto* $\mathbb{R}^n$ *?*
- *esistono le derivate parziali* $f_{x_i}(0, \dots, 0)$ *?*

Esercizio 2 *Data una funzione* $f(x, y)$ *di due variabili ed un punto* (a, b) *nel suo insieme di definizione considerare le funzioni di una variabile*

$$g(x) := f(x, b) \quad , \quad h(y) := f(a, y)$$

Rispondere alle seguenti domande giustificando le risposte con dimostrazioni ovvero con controesempi:

- *se* g *è continua in* $x = a$ *e* h *è continua in* $y = b$ *allora* f *è continua in* (a, b) *?*
- *se* f *è continua in* (a, b) *allora* g *è continua in* $x = a$ *e* h *è continua in* $y = b$ *?*

Esercizio 3 *Verificare che le funzioni* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *in [ ] soddisfano per ogni* (x, y) *le corrispondenti relazioni tra le loro derivate parziali:*

- *1.* $x f_x(x, y) = f_y(x, y)$ $[f = xe^y]$
- *2.* $x f_x(x, y) + y f_y(x, y)$ $[f = \frac{x+y}{x-y}]$
- *3.* $x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = f(x, y)$ $[f = \sqrt{x^2 + y^2}]$
- *4.* $x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = -2f(x, y)$ $[f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}]$

Per ognuna delle equazioni alle derivate parziali 1—5 trovare eventuali altre soluzioni.

Esercizio 4 *Una funzione $u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è armonica in un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se $u \in C^2(A)$ e*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in A$$

Determinare l'insieme A dove le seguenti funzioni sono armoniche

- $u(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy$, *con* a, b *costanti*
- $u(x, y) = 3x^2y - y^3 + bxy$
- $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
- $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- $u(x, y) = \arctan y/x$

Esercizio 5 *Mostrare che le funzioni $f(x, y) := e^{kx}\cos(ky)$ e $g(x, y) := e^{kx}\sin(ky)$ e $h(x, y) := f(x, y) + g(x, y)$ verificano, qualunque sia il parametro reale k l'equazione di Laplace*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Trovare soluzioni di

$$u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = 0$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 6 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili due volte, verificare che la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

dove c è un parametro reale soddisfa in ogni punto $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ l'equazione della propagazione delle onde

$$u_{tt}(t, x) = c^2\, u_{x,x}(t, x)$$

Esercizio 7

- *Verificare che la funzione delle 2 variabili reali (t, x) definita da $t^{-1/2}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$ soddisfa in ogni punto l'equazione*

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x)$$

- *Verificare che la funzione delle 3 variabili reali* (t,x,y) *definita da* $t^{-1}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$ *soddisfa in ogni punto l'equazione*

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y)$$

- *Basandosi su quanto sopra trovare una soluzione dell'equazione della propagazione del calore*

$$u_t(t,x,y,z) = u_{xx}(t,x,y,z) + u_{yy}(t,x,y,z) + u_{zz}(t,x,y,z)$$

Esercizio 8 *Sia* f *derivabile in* A *aperto di* $\mathbb{R}^3$. *Per* $\xi = (x,y,z)$ *e* $\xi' = (x',y',z')$ *definiamo l'azione di gruppo* $\xi \circ \xi' = (x+x', y+y', z+z'+2(x'y-xy'))$ *(*$\mathbb{R}^3$ *con questa azione di gruppo si chiama spazio di Heisenberg).* e_1, e_2 *e* e_3 *è la base canonica di* $\mathbb{R}^3$.

- *In analogia con le derivate parziali, determinare* $Xf(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi \circ h e_1) - f(\xi)}{h}$ *e* $Yf(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi \circ h e_2) - f(\xi)}{h}$.
- *Dimostrare che se* $Xf = 0$ *e* $Yf = 0$ *in* A *allora* f *è costante in* A.
- *Dimostrare che se* Xf *e* Yf *sono derivabili allora* $[X,Y]f(\xi) := X(Yf(\xi)) - Y(X(f)) = -4\partial_z f(\xi)$
- *Per* $\lambda \in \mathbb{R}$, *sia* $g_\lambda(\xi) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z)$. *Verificare che*

$$X(g_\lambda(\xi)) = \lambda X(f)\Big|_{(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z)}, \quad Y(g_\lambda(\xi)) = \lambda Y(f)\Big|_{(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z)}.$$

- *Verificare che se* Xf *e* Yf *sono* C^1 *in un intorno di* $\xi \in A$ *allora* f *è differenziabile in* ξ.