FUNZIONI -Esercizi qualitativi.

Esercizio 1 • *dimostrare che se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è differenziabile con* $\|\nabla f(x)\| \le L < +\infty$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *allora* f *è Lipschitziana su* $\mathbb{R}^n$, *cioè*

$$|f(x) - f(y)| \le L||x - y|| \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

- *indicare quali tra le seguenti funzioni non sono Lipschitziane su* $\mathbb{R}^n$*:*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f(x,y) = xe^y$$

- *esistono funzioni* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$|f(x) - f(y)| \le L||x - y||^2 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^n \ ?$$

Esercizio 2 *Quali tra le seguenti funzioni sono radiali, quali omogenee, quali convesse ?*

- $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$ $\quad f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad f(x,y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ $\quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$
- $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ $\quad f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$ $\quad f(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$
- $f(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$ $\quad f(x,y,z) = \log(1 + e^{x+y+z})$ $\quad f(x,y,z) = x^{y \log z}$
- $f(x,y,z) = \log(x^+ y^2 + z^2)$ $\quad f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ $\quad f(x,y) = 3(1 - x/2 - y/4)$
- $f(x,y) = xy$ $\quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ $\quad f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $\quad f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
- $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad f(x,y) = xe^{-y}$ $\quad f(x,y) = \arccos \frac{<x,y>}{||x||\,||y||}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

Esercizio 3 Matrici semidefinite positive
Sia M^n *l'insieme della matrici* A *di tipo* $n \times n$ *ad entrate reali* a_{ij} *identificato in modo naturale con* $\mathbb{R}^{n^2}$.
Una matrice $A \in M^n$ *è* **semidefinita positiva** *e si scrive* $A \ge 0$ *se* $\langle Ax, x\rangle \ge 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$.

- *verificare che l'insieme* $C = \{A \in M^n : A \ge 0\}$ *è un cono di vertice* 0 *in* $\mathbb{R}^{n^2}$
- *dimostrare che la funzione* $\det : C \to \mathbb{R}$ *è positivamente omogenea, determinare il grado*

- *per* $n = 2$ *e* $A \in M^2$*, calcolare* $\nabla \det(A)$ *e* $\nabla^2 \det(A)$
- *analizzare i punti critici su* M^2 *della funzione* $A \to \det(A)$
- *è vera la disuguaglianza* $\det(A) \leq \left(\frac{\mathrm{tr}(A)}{n}\right)^n$ *?*
- *è vero che per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \ \langle Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle Ay, y\rangle^{\frac{1}{2}} \quad ?$$

Esercizio 4 Tre disuguaglianze di convessità

• **disuguaglianza di Cauchy parametrica***: dimostrare che per ogni* $\epsilon > 0$ *si ha*

$$\inf_{(x,y)\in A} (\epsilon x^2 + \frac{y^2}{4\epsilon} - xy) = 0$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

• **disuguaglianza di Young***: dimostrare che*

$$\inf_{(x,y)\in A} \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy\right) = 0$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ *dove* $p, q \in (1, +\infty)$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

[scrivere $xy = e^{\log x + \log y}$ *e usare la convessità della funzione* $t \to e^t$ *]*

Esercizio 5 *Sia* Q *il quadrato* $[0, \pi] \times [0, \pi]$*. Calcolare il minimo ed il massimo di*

$$f(x, y) = e^x \sin y \quad su \quad Q$$

Esercizio 6 *Determinare i punti critici delle seguenti funzioni e verificare se sono punti di massimo o di minimo locale:* $f(x, y, z) = y^3 + x^2 + z^2 - xy - xz$ *e* $f(x, y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$.

Esercizio 7 *Sia* $g \in C^1(\mathbb{R})$*. Sia* $f(x, y) = \int_0^{x^2+y} g(t)dt$*. Calcolare* ∇f *e* $D^2 f$ *e verificare che* f *è due volte differenziabile. Dimostrare che nei punti critici di* f*,* $D^2 f$ *ha almeno un auto-valore nullo.*