FUNZIONI -Esercizi qualitativi II

Esercizio 1 *Per ogni* $\lambda > 0$, *sia* $T_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, *tale che* $(T_\lambda x)_i = \lambda_i^\mu x_i$ *con* $\mu_i \in \mathbb{R}$. *Diremo che* $f : \mathbb{R}^N \mathbb{R}$ *è* T *omogenea di grado* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se* $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$*:* $f(T_\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$.

- *Determinare i* μ_i *tali che* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^3$ *sia* T *omogenea di grado* $\alpha = 2$.
- *Supponiamo che la funzione* f *è differenziabile in* $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, *dimostrare che* f *è* T *omogenea di grado* α **se e solo se** $< \nabla f(x), M_\mu x >= \alpha f(x)$ *dove* M_μ *è la matrice diagonale* $(M\mu)_{ii} = \mu_i$.

Esercizio 2 *Sia* f *una funzione differenziabile in* x_o *tale che* $f(x_o) = 0$, *dimostrare che* $g(x) = |f(x)|$ *è differenziabile in* x_o *se e solo se* $\nabla f(x_o) = 0$.

Esercizio 3 *Lo scopo di questo esercizio è di dimostrare il seguente*

Teorema 1 (del sotto-differenziale) *Sia* f *una funzione convessa in* A *aperto convesso allora per ogni* $x \in A$ *esiste* $p \in \mathbb{R}^N$ *tale che* $f(y) \geq f(x) + < p, x >$ *per ogni* $y \in A$.

(p è detto sotto-differenziale di f in x e coincide con il vettore gradiente nei punti in cui f è differenziabile*). Sia* $Epi_f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$ *e sia* $Q = (\bar{x}, \bar{y}) \notin Epi_f$.

- *Dimostrare che esiste* $x_o \in A$ *tale che* $(\bar{x} - x_o)^2 + (\bar{y} - f(x_o))^2 \leq (\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2$ *per ogni* $(x, y) \in Epi_f$.
- *Sia* $d = \sqrt{(\bar{x} - x_o)^2 + (\bar{y} - f(x_o))^2}$. *Se* $b = \frac{(\bar{x} - x_o, \bar{y} - f(x_o))}{d}$ *allora il semi spazio* $\langle b, (x - x_o, y - f(x_o)\rangle \leq \frac{d}{2}$ *contiene* Epi_f *ma non* Q.
- *Fissato* $\tilde{x} \in A$ *Sia la successione* $(x_n, y_n) \notin Epi_f$ *tali che* $(x_n, y_n) \to (\tilde{x}, f(\tilde{x}))$. *Se* b_n *è mutatis mutandis la successione dei vettori costruiti al punto precedente. Dimostrare che, se* b *è il limite a meno di sottosuccessioni di* b_n *allora l'iperpiano* $\langle b, (x - \tilde{x}, y - f(\tilde{x}))\rangle = 0$ *verifica* $\langle b, (x - \tilde{x}, f(x) - f(\tilde{x}))\rangle \leq 0$ *per ogni* $x \in A$.
- *Concludere la dimostrazione.*