Esercizi su funzioni di più variabili dati in vari esami scritti.

Esercizio 1 *Considerare la funzione:* $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-y^4}{x^2+y^2}$
(a) studiare limitatezza e omogeneità di f *su* $\mathbb{R}^2$
(b) f *è prolungabile con continuità in* $(0,0)$ *?*
(c) studiare la differenziabilità della funzione prolungata
(d) Considerare l'insieme di livello $\{f(x,y) = 1/2\}$ *e determinare se in un intorno del punto* $(0, \sqrt{1/2})$ *è il grafico di una funzione.*

Esercizio 2 *Considerare la funzione* f *definita per* $x \in \mathbb{R}^n$ *da*

$$f(x) = \Big(< Ax, x > -1 \Big)^2$$

con A *semidefinita positiva.*
(i) calcolare gradiente ed Hessiano di f
(ii) determinare i punti critici di f
(iii) classificare i punti critici di f *supponendo* A *definita positiva.*

Esercizio 3 *La funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *è definita da* $f(x,y,z) = e^{|x-y|}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1. *determinare l'insieme dei punti critici di* f *su* $\mathbb{R}^3$
2. *calcolare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di* f *sull'insieme*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Esercizio 4 *Si consideri la funzione di due variabili:*

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1|x_2|}{\max[|x_1|;|x_2|]} & se\ (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità di f *in* $\mathbb{R}^2$*, e la derivabilità e differenziabilità di* f *in* $(0,0)$.

Esercizio 5 *Sia* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *definito da* $f(x) = |x|^\alpha$*, con* $\alpha \geq 0$*. Determinare per quali* α*,* f *è continua, per quali è Lipschitz continua in* $(0,0)$*, per quali è Lipschitz in* $\mathbb{R}^N$*, per quali è differenziabile, per quali è due volte differenziabile e infine per quali* α *è convessa.*

Esercizio 6 *Considerare la funzione definita su* $\mathbb{R}^2$ *dalla formula*

$$f(x,y) = \min(x,y)$$

(a) è continua in $(0,0)$ *?*
(b) è continua in $\mathbb{R}^2$
(c) è differenziabile in $(0,0)$*?*
(d) è convessa o concava su $\mathbb{R}^2$ *?*
(e) è Lipschitziana su $\mathbb{R}^2$ *?*
(f) Disegnare l'insieme di livello 2.

Esercizio 7 *Sia* $f(x,y) = xy\, e^{x+y}$
(a) f *è limitata su* $\mathbb{R}^2$ *?*
(b) determinare i punti critici di f *in* $\mathbb{R}^2$
(c) calcolare $\max_T f(x,y)$ *dove* $T = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y = 1\}$.

Esercizio 8 *Sia* Q *il quadrato* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
(a) Scrivere esplicitamente la funzione $d(x,y)$ *che ad ogni punto dell'insieme* $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ *associa la sua distanza da* Q.
(b) Determinare l'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ *dove* d *è dotata di derivate parziali prime.*
(c) Calcolare la misura di Lebesgue dell'insieme in cui d *non è derivabile*
*(d)*Facoltativo *Dimostrare che* d *è Lipschitz continua e determinare se* d *è una funzione convessa in* $\mathbb{R}^2_+$.

Esercizio 9 *Determinare* E *l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = x \sin \frac{1}{y}$
(a) f *è limitata in* E *?*
(b) calcolare i punti critici di f *in* E.