FUNZIONI 3.

Esercizio 1 *Determinare un aperto convesso di $\mathbb{R}^2$ dove è convessa la funzione $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.*

Esercizio 2 *Sia A un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$. La funzione distanza da A è definita da*

$$d_A(x) = \inf_{x_o \in A} |x - x_o|.$$

Determinare se $f(x) = -d_A(x)$ è una funzione convessa.

Esercizio 3 *Sia B_o il disco unitario di centro l'origine e B_1 il disco unitario di centro il punto $(3,3)$. Sia $C = B_o \cup B_1$, determinare se d_C è convessa.*

Esercizio 4 *Determinare la matrice Hessiana della funzione $f(x,y) = \int_0^{x+2y} e^{t^2} dt$.*

Esercizio 5 Il principio del massimo debole. *Sia g una funzione $C^2(\mathbb{R}^N)$, e sia A un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$ definito da $A = \{x \in \mathbb{R}^N,\ g(x) < 0\}$ e $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^N,\ g(x) = 0\}$. Sia u una funzione $C^2(A)$, si ricorda che*

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \partial^2_{x_i} u.$$

- *Dimostrare che se $\Delta u > 0$ in A allora $\max_{\overline{A}} u = \max_{\partial A} u$.*
- *Dimostrare che se $\Delta u \geq 0$ in A e $v(x) = u(x) + \varepsilon e^{a x_1}$ allora $\Delta v > 0$*
- *Dimostrare che se $\Delta u \geq 0$ in A allora $\max_{\overline{A}} u = \max_{\partial A} u$ (*usare le domande precedenti*).*
- *Dimostrare che se $\Delta u = 0$ in A allora $\max_{\overline{A}} u = \max_{\partial A} u$ e $\min_{\overline{A}} u = \min_{\partial A} u$.*
- *Sia una matrice B simmetrica tale che esistano $0 < \lambda < \Lambda$ per i quali*

  $$\lambda I \leq B \leq \Lambda I.$$

  Dimostrare che se u verifica

  $$\mathrm{tr}(\mathrm{BD}^2\mathrm{u}) = 0 \text{ in A}$$

  ("tr" indica la traccia della matrice, si ricorda che $trM = \sum_{i=1}^{N} \langle Me_i, e_i \rangle$ dove $(e_1, \ldots, e_N)$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^N$) allora $\max_{\overline{A}} u = \max_{\partial A} u$ e $\min_{\overline{A}} u = \min_{\partial A} u$.