FUNZIONI IMPLICITE e VARIE

Esercizio 1 *Dimostrare che per ogni* t *in* $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *esiste ed è unico* $x = x(t)$ *soluzione di*

$$\sin(tx) + \cos(tx) = x$$

. Dimostrare che $x(t)$ *è in* C^∞ *e determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 in 0 di* $x(.)$. *Suggerimento: usare il fatto che* $\cos a - \sin a = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - a)$.

Esercizio 2 *Sia* $f(x, y, z) = (\sin x + \sin y, \sin y + \sin z)$. *Dimostrare che esiste un* U *intorno di* 0*, tale che* $\forall x \in U$ *esiste ed è unica* $(y, z) = (y(x), z(x))$ *tale che* $f(x, y(x), z(x)) = 0$. *Determinare* $(y'(0), z'(0))$.

Esercizio 3 *Sia* $f(x, y) = \int_0^y e^{-t^2} dt + \sin(x + y)$. *Dimostrare che esiste un* U *intorno di* 0*, tale che* $\forall x \in U$ *esiste ed è unica* $y = y(x)$ *tale che* $f(x, y(x)) = 0$. *Dimostrare che esiste* $\delta > o$ *tale che per ogni* $x \in (-\delta, \delta)$:

$$-x^2 + \frac{1}{2}x \leq y(x) \leq \frac{1}{2}x + x^2.$$

Esercizio 4 *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *e sia* $g(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *per* $x \neq y$ *e* $g(x, x) = f'(x)$. *Dimostrare che* g *è continua e che se* f *è due volte derivabile allora* g *è differenziabile.*

Esercizio 5 *Sia* f *una funzione due volte differenziabile in* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $A = \{x \in \mathbb{R}^N,\ \nabla f(x) = 0, \det D^2 f(x) \neq 0\}$. *Dimostrare che se* A *non è vuoto allora i punti di* A *sono isolati.*