FUNZIONI IMPLICITE II

Esercizio 1 *Sia A una matrice $N \times N$ e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definita da $f(x, y) = x - Ay + |y|^2 x$.*

- *Calcolare $\partial_x f$ e $\partial_y f$*
- *Determinare delle condizioni su A che garantiscono che esista $\delta > 0$ tale che per ogni x tale che $|x| < \delta$ esiste $y(x) \in C^1(B_\delta(0))$ tale che $f(x, y(x)) = 0$.*
- *Calcolare $\nabla y(0)$ e $D^2 y(0)$.*

Esercizio 2 *Sia A una matrice $N \times N$ e sia il* **sistema di equazioni nonlineari**

$$(\star\star) \quad Ax = g(x)$$

dove $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una funzione data. Dimostrare che se A è invertibile e g è Lipschitziana con costante L tale che $L\|A^{-1}\| < 1$, allora il sistema $(\star\star)$ ha un unica soluzione.

Esercizio 3 *Per $A = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ sia $f : A \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)$.*

- *Calcolare ∇f*
- *Determinare $f(A)$*
- *Verificare che f è localmente invertibile in A.*
- *Dimostrare che f non è una biezione tra A e $f(A)$.*

Esercizio 4 *Sia $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Determinare $f(\mathbb{R}^2)$. Dimostrare che f è localmente invertibile ma non é iniettiva in $\mathbb{R}^2$. Determinare un insieme A tale che f è un diffeomorfismo da A in $f(A)$.*

Esercizio 5 *Sia $g(x, y) = (x^2 + 2y, 2x + y)$. Determinare i punti di $\mathbb{R}^2$ in cui è localmente invertibile. Trovare il pi grande aperto A contenente l'origine per cui g è un diffeomorfismo tra A e $g(A)$.*