MISURA E INTEGRAZIONE

Esercizio 1 *Considerare la funzione H definita su*

$$E = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \geq 0,\ 1/2 \leq \sum_{i=1}^{2} x_i \leq 1\}$$

da $H(x) = -\sum_{i=1}^{2} x_i \, log \, x_i$ *Dimostrare che*

$$\int_E H(x)\, dx \leq 3/8 \, \log 2$$

Esercizio 2 *Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue e $f : E \to [0, +\infty)$ una funzione integrabile su E. Dimostrare che per ogni $t > 0$ vale la disuguaglianza di Markov:*

$$|\{x \in E : f(x) > t\}| \leq \frac{1}{t} \int_E f(x)\, dx$$

[Suggerimento da guardare solo dopo: $E = \{f > t\} \cup \{f \leq t\}$, quindi

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{\{f>t\}} f(x)\, dx + \int_{\{f \leq t\}} f(x)\, dx \geq \int_{\{f>t\}} f(x)\, dx \ \ \geq t|\{f > t\}|$$

]

Esercizio 3 *Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue e $f : E \to [0, +\infty)$ una funzione integrabile su E. Dalla disuguaglianza di Markov dedurre che se $\int_E f(x)\, dx = 0$ allora $f = 0$ quasi ovunque.*

[Suggerimento da guardare solo dopo: $E_0 = \{f \neq 0\}$, $E_k = \{|f| > 1/k\}$ $k = 1, 2, \ldots.$ Per $k \geq 1$ usando Markov si ha

$$\frac{|E_k|}{k} \leq \int_{E_k} f(x)\, dx \leq \int_E f(x)\, dx = 0$$

Quindi tutti gli E_k hanno misura 0 e dunque $E = \cup_1^{+\infty} E_k$ ha misura 0]

Esercizio 4 *Sia T il triangolo del piano x, y che ha per vertici $(0,0)$, $(1,3)$, $(2,1)$. Determinare*

$$\int_T x^2 y dx dy$$

Esercizio 5 *Sia $D = \{(x,y),\ x^2+y^2 \le 6,\ y \ge x,\ x \ge 0\}$. Calcolare*

$$\int_D x dx dy.$$

Esercizio 6 *Sia $V = \{(x,y,z),\ x+y+z \le \pi,\ x,y,z \ge 0\}$. Calcolare $\int_V \cos x \cos y \cos z dx dy dz$.*

Esercizio 7

- *Calcolare $\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$*
- *Dedurne che $e^{-(x^2+y^2)}$ è misurabile su R^2.*
- *Sia Q_L il quadrato $[0,L]\times[0,L]$. Usare il teorema di Fubini per scrivere $\int_{Q_L} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ come un prodotto di integrali.*
- *Usando le domande precedenti calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.*

Esercizio 8 *Per quali valori reali di $p \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = |x - y^2|^p$ è integrabile secondo Lebesgue su $[-1,1] \times [-1,1]$?*

Esercizio 9 *Calcolare l'integrale triplo*

$$\int_T \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx\, dy\, dz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D; 0 \le z \le 1\}$ e D è il trapezio nel piano (x,y) avente vertici nei punti $(1,0),(2,0),(0,2),(0,1)$

Esercizio 10 *Calcolare l'integrale $\int_V e^{x+2y-z} dx dy dz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.*

Esercizio 11 *Determinare se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ è integrabile secondo Lebesgue in $[0,1]$ la funzione*

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ k & x = \frac{k}{n},\ k = 2, \cdots, n \text{ intero} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e se lo è $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. In caso positivo calcolare $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx$ e $\int_{[0,1]} f(x) dx$ (Facoltativo: dire perchè non sono contraddetto i teoremi sulla convergenza monotona e dominata.)

Esercizio 12 *Calcolare*

$$\int\int_P e^x \, dxdy$$

dove P *è il quadrilatero di* $\mathbb{R}^2$ *di vertici* $(1,1)$, $(5,2)$, $(4,7)$, $(0,6)$

Esercizio 13 *Sia* $f\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *definita da* $f(x) = |x|^\beta$. *Determinare per quali* β, *è definito*

$$\int_{B_1(0)} |x|^\beta dx$$

e per quali è definito

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} |x|^\beta dx$$

fare il caso $N = 2$ *e* $N = 3$.