# INTEGRAZIONE

**Esercizio 1** *Dimostrare che se esiste* $\lim_{t\to+\infty} g(t) = l$ *allora* $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt = l$.

**Esercizio 2** *Sia* $f$ *una funzione continua in* $\mathbb{R}$*tale che per ogni* $x > 0$ *esiste* $Lf(x) = \int_{[0,+\infty)} e^{-xt} f(t)dt$.

*a) Dimostrare che se* $\int_{[0,+\infty)} f(t)dt < \infty$ *allora esiste* $\lim_{x\to 0} Lf(x)$

*b) Calcolare* $Lg(x)$ *per* $g(x) = \cos x$.

*c) Usare b), per dimostrare che il viceversa di a) non è vero.*

**Esercizio 3** *Sia* $f(x) = \int_{[0,+\infty)} \frac{(1-e^{-xt^2})}{t^2} dt$. *Determinare dominio di esistenza di* $f$, *dominio di continuità e di derivabilità . Calcolare per* $x > 0$, $f'(x)$. *Se ne deduca l'espressione di* $f(x)$.

**Esercizio 4** *Calcolare i seguenti limiti*

- $\lim_{n\to+\infty} \int_E x^4y^2 + 2^{-(x-n)^4}$ *dove* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, |y| < \frac{1}{x^2}\}$
- $\lim_{n\to+\infty} \int_{(0,\frac{1}{n})} \frac{n^{2/3}\log(1+3x)}{x^{\frac{4}{3}}[1+n^n(9x)^n]}\, dx$

**Esercizio 5** *Sia* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Stabilire per quali valori del parametro* $\beta > 0$ *è integrabile su* $E = \{z^4 - x^2 - y^2 > 0\}$, *la funzione*

$$f_\beta(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\beta} & z \le 1 \\ (x^2 + y^2 + z^2)^{-\beta-1} & z > 1. \end{cases}$$