MISURA E INTEGRAZIONE

Esercizio 1 *Sia F un insieme di misura nulla e D tale che $D \cup F$ è misurabile. Dimostrare che D è misurabile.*

Esercizio 2 *Sia F un insieme di misura nulla e sia D tale che $D \subset F$ è misurabile. Dimostrare che D è misurabile e $|D| = 0$.*

Esercizio 3 *Sia il quadrato $Q_l(a,b) = [a - \frac{l}{2}, a + \frac{l}{2}] \times [b - \frac{l}{2}, b + \frac{l}{2}]$, sia la croce centrata $R_l(a,b) = \big((a - \frac{l}{6}, a + \frac{l}{6}) \times [b - \frac{l}{2}, b + \frac{l}{2}]\big) \cup \big([a - \frac{l}{2}, a + \frac{l}{2}] \times (b - \frac{l}{6}, b + \frac{l}{6})\big)$ Definiamo la seguente successione di chiusi*

$$K_1 = Q_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus R_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

K_1 è composto da 4 quadrati, per ognuno di essi togliamo la croce centrata corrispondente e otteniamo

$$K_2 = K_1 \setminus \left(\cup_{i=1}^{4} R_{\frac{1}{3}}(P_i)\right), \text{ con } P_1 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}), P_2 = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}), P_3 = (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}), P_4 = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}).$$

K_2 è composto da 4 quadrati, per ognuno di essi togliamo la croce centrata corrispondente e otteniamo

$$K_3 = K_2 \setminus \left(\cup_{i=1}^{4^2} R_{\frac{1}{3^2}}(P_i)\right), \text{ con } P_1 = (\frac{1}{2 \cdot 3^2}, \frac{1}{2 \cdot 3^2}), \ldots$$

e cosi via, dai quadrati che compongono K_n togliamo le croci centrate corrispondenti:

$$K_{n+1} = K_n \setminus \left(\cup_{i=1}^{4^{n-1}} R_{\frac{1}{3^{n-1}}}(P_i)\right).$$

Dimostrare che gli insiemi K_i sono misurabili. Calcolare $|K_i|$. Dimostrare che $K = \cap_{i=1}^{\infty} K_i$ è misurabile e calcolarne la misura.

Esercizio 4 *Per $n = 1, 2, \ldots$, sia con $[\frac{1}{n}, 1]_{\mathbb{Q}}$ l'insieme dei numeri razionali compresi tra $1/n$ e 1. Si consideri poi l'insieme $A_n = (0, \frac{1}{n}) \cup [\frac{1}{n}, 1]_{\mathbb{Q}}$.*

- *Determinare se A_n è misurabile secondo Lebesgue e, se lo è , calcolarne la misura.*

- *Calcolare la misura di* $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- *Calcolare* $\int_{A_n} f_{n+1}(x)\,dx$ *per* $f_k(x) = [kx]$.

Esercizio 5 *Usando la definizione di misura di Lebesgue calcolare la misura del triangolo chiuso di vertici* $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$.

Esercizio 6 *Sia* f_n *una successione di funzioni continue e positive in* $[0,1]$. *Sia* $C_n = \{(x,y),\ \textit{tali che}\ \ x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq f_n(x)\}$. *Dimostrare che* C_n *è misurabile. Dimostrare che se la successione è monotona decrescente* $C = \cap_n C_n$ *è misurabile e* $|C| = \lim_{n\to\infty} |C_n|$.

Esercizio 7 *Sia* R *il rettangolo* $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$. *Calcolare la misura bidimensionale dei seguenti insiemi*

$$MR = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = Mx, x \in R\}$$

e

$$JR = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = Mx, x \in R\}$$

dove M *è la matrice diagonale*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

con $\lambda > 0, \mu > 0$ *e* J *la matrice simplettica*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8 *Sia* R *il rettangolo* $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ *e* M *è la matrice diagonale*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Determinare valori di $a_1, b_1, a_2, b_2, \lambda, \mu$ *tali che* $|MR| = 0$.

Esercizio 9 *Sia* R *il rettangolo* $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ *e* A *la matrice*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Determinare l'insieme immagine AR *e calcolare la sua misura* $|AR|$.

Esercizio 10 *Sia* R *il rettangolo* $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ *e* A *la matrice*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Determinare l'insieme immagine AR *e calcolare la sua misura* $|AR|$.