Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2016/17

Analisi (I. Birindelli, L.Fanelli, M. Marchi, A. Siconolfi)

Scheda 11 – 21 dicembre 2017

Esercizio 1. Sia $w = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$ e sia $z = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2}$.
Scrivere la rappresentazione trigonometrica di w e z e calcolare w^{128} e z^8.

Esercizio 2. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x\ln^2 x} \\ y(e) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = (x+1)\,e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = (2x+1)\,\sin(3\,x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Dati $a,\ y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = a \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = \sin x \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = a + \sin x \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - y = 1 + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y' = -3y + x^2;\ y' = xy + 2x;\ y' = y^2;\ y' = xe^{-3y}$$

Esercizio 6. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni

$$y'' + 3y' - 10y = 0, \qquad y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Esercizio 7. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 8. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' = e^t \sin t, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \sin t, \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + 2y' + y = \sin t + \cos(2t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 9. Sia $\varepsilon \in (0,1)$. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2\varepsilon\, y' + y = \sin(t).$$

Si determinino i valori delle condizioni iniziali per le quali la soluzione $y = y(t)$ rimane limitata per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10. Sia $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq \pm 1$.
i. Trovare la soluzione $y(t;\omega)$ del problema di Cauchy

$$y'' + y = \sin(\omega t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

ii. Calcolare il limite $y_1(t) := \lim_{\omega \to 1} y(t;\omega)$.
iii. Verificare che y_1 è soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + y = \sin(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Esercizio 11. Trovare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il problema con condizioni al bordo

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

ammette soluzioni diverse dalla soluzione nulla.

Esercizio 12. ☹ Siano $a > 0$ e $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $f(t) \geq 0$ per ogni t e $f(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Determinare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy

$$y' + a\, y = f(t), \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$