Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2017/18

Analisi (I. Birindelli, M.V. Marchi, M.A. Pozio, A. Siconolfi)

Scheda 1 – 29 settembre 2017

Esercizio 1. Si provi per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

per ogni $q \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti condizioni

$$x - 2|x| + 2 > 0, \qquad ||x| - 1| \leq 1, \qquad \begin{cases} |x| \leq 2, \\ |x-1| \leq 1, \end{cases} \qquad 2x^2 - 1 \leq |x^2+1| - |x^2|.$$

Esercizio 3. Per quali $x, y \in \mathbb{R}$ vale la relazione $|x+y| = |x| + |y|$?

Esercizio 4. Dire quali tra i seguenti insiemi sono limitati e quali non lo sono

$$\{0\} \cup \{1\}, \qquad (-\infty, 0) \cup [1,2], \qquad [-1,1] \cup [0,+\infty), \qquad \mathbb{N}.$$

Esercizio 5. Dire quale tra i seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \geq 1\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \leq 2\}, \qquad A \cup B, \qquad A \cap B.$$

Esercizio 6. Dire quale tra i seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo

$$C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 1 \geq 0\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2|x-2| \leq 3\}, \qquad C \cup D, \qquad C \cap D.$$

Esercizio 7. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2 + x - x^2 > 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 1\}, \qquad A \cup B, \qquad A \cap B.$$

Esercizio 8. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$E := \left\{ \frac{1+m}{1+n} \ : \ m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Indicare se si tratta di massimo e minimo.

Esercizio 9. Determinare per ciascuno dei seguenti insiemi se è limitato e, in caso affermativo, calcolarne gli estremi superiore ed inferiore, indicando se si tratta di massimo e minimo, rispettivamente

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x+2| > 4\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x+1| \leq 3\}, \qquad \mathbb{N} \cup \left(-\frac{10}{3}, 5\right),$$

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ ||x| - 1| < 2\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x+2| \leq 4, \ x^2 - 5x + 4 > 0\}.$$

Esercizio 10. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi limitati e non vuoti. Dimostrare che, se $A \subseteq B$, allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Esercizio 11. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi limitati e non vuoti. Dimostrare che

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A,\ \inf B\} \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A,\ \sup B\}\,.$$

Osservazione: il risultato di questo e del precedente esercizio continuano a valere anche se gli insiemi sono illimitati purché si scriva $\sup E = +\infty$ *se* $E \subseteq \mathbb{R}$ *è illimitato superiormente e* $\inf E = -\infty$ *se* $E \subseteq \mathbb{R}$ *è illimitato inferiormente.*

Esercizio 12. Ricordata la definizione di insieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente, scrivere la definizione di "insieme non limitato superiormente" che diremo anche "*insieme illimitato superiormente*".
Osservare che $D := \{2n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ è l'insieme dei numeri dispari. Dimostrare che D è illimitato superiormente.
Analogamente si dia la definizione di *insieme illimitato inferiormente* e quella di *insieme illimitato*.
Rispondere poi al seguente questionario:
Sia $E \subset \mathbb{R}$ un qualsiasi insieme illimitato. Allora

(1) E è illimitato superiormente $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
(2) E è illimitato inferiormente $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
(3) E è illimitato superiormente e/o inferiormente $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
(4) E è illimitato superiormente e inferiormente $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 13. ☹ Dimostrare, usando l'Assioma di Archimede, la seguente affermazione:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad x \in (a, b).$$

Esercizio 14. ☹ Sia $E = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 < 2\}$. Dimostrare che E è superiormente limitato e che il suo estremo superiore $\Lambda := \sup E$ è tale che $\Lambda^2 = 2$.