Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2017/18

Analisi (I. Birindelli, M.V. Marchi, A. Pozio, A.Siconolfi)

Scheda 4 – 20 ottobre 2017

Esercizio 1. Dire se le seguenti serie convergono e, in caso affermativo, calcolarne la somma

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n\,2^n}{6^n}$$

Esercizio 2. Dire se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=N}^{+\infty} 3^n < +\infty.$$

Esercizio 3. Discutere il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n+n^2}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n+8}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^2+n)^n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}\,,$$

Esercizio 4. Studiare la convergenza assoluta delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)\sin\left(\frac{1}{2^n}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}$$

Tali serie convergono semplicemente?

Esercizio 5. Discutere, al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Esercizio 6. Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergenti, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ per ogni n. Dimostrare che

$$\sum_n a_n b_n < +\infty$$

Esercizio 7. Trovare due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergenti, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ per ogni n, e tali che

$$\sum_n a_n b_n < \left(\sum_n a_n\right)\left(\sum_n b_n\right).$$

Esercizio 8. Sia $a_n \geq 0$ per ogni n. Dire se é vero che $\sum_n (a_n)^2$ convergente $\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente.

Esercizio 9. **i.** Dimostrare la disuguaglianza

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii. Utilizzando **i.**, dimostrare che se le serie $\sum_n (a_n)^2$ e $\sum_n (b_n)^2$ sono convergenti, allora anche la serie $\sum_n a_n b_n$ è convergente.

Esercizio 10. Date $\{a_n\}$ una successione infinitesima e $\sum_n b_n$ una serie assolutamente convergente, provare che la serie $\sum_n a_n b_n$ è una serie convergente.

Esercizio 11. Trovare una successione non monotona a_n, con $a_n > 0$ per ogni n, tale che la serie $\sum_n a_n$ converga.

Esercizio 12. **i.** Sia S la somma di una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini positivi. Si dimostri che

$$S = \sup\{\sum_{n\in F} a_n : F \subset \mathbb{N},\ F \text{ finito}\}$$

ii. Data una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, un suo riordinamento é una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$, dove ϕ é una funzione biettiva di $\mathbb{N}$ in se stesso. Si utilizzi **i.** per dimostrare che se una serie a termini positivi converge, allora tutti i suoi riordinamenti convergono e hanno la stessa somma.

Esercizio 13. Sia $\{a_k\}$ una successione. Supponiamo che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$ e che $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = +\infty$. Allora necessariamente si ha $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+ = +\infty$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^- = +\infty$ [*si è usata la notazione:* $x^+ = \max\{x, 0\}$ *e* $x^- = \max\{-x, 0\} \Rightarrow x = x^+ - x^-$ *e* $|x| = x^+ + x^-$, *dove* x^+ *si chiama "parte positiva" e* x^- *"parte negativa"*.].

Esercizio 14. Sia a_n decrescente e infinitesima. Allora, essendo $a_{2^{n+1}} \leq a_k \leq a_{2^n}$ per ogni k tale che $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$, dedurre che le due serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere.

Esercizio 15. Utilizzando l'esercizio precedente dedurre che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge positivamente se $\alpha \leq 1$.

Esercizio 16. Trovare due successioni a_n, b_n, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} < +\infty.$$