Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2017/18

Analisi (I. Birindelli, M. V. Marchi, A.Pozio, A. Siconolfi)

Scheda 3 – 14 ottobre 2017

Esercizio 1. Dati tre parametri reali α, β e γ, si consideri la successione

$$\alpha\, n^2 + \beta\, n + \gamma.$$

Si chiede

- determinare tutti parametri per cui è monotona;
- determinare tutti parametri per cui è definitivamente monotona;
- determinare tutti parametri per cui è divergente positivamente;
- determinare tutti parametri per cui è divergente negativamente;
- determinare tutti parametri per cui è convergente;
- determinare tutti parametri per cui non ha limite.

Esercizio 2. Dato $E \subset \mathbb{R}$, definiamo

$$\begin{aligned} E' &= \{|x| \mid x \in E\} \\ E'' &= \{x^2 \mid x \in E\} \\ E''' &= \{-x^3 \mid x \in E\} \end{aligned}$$

si dica che relazione c' è tra l'estremo superiore ed inferiore di tali insiemi e il $\sup E$, $\inf E$.

Esercizio 3. Dato un qualsiasi numero reale x, si provi che esiste una successione x_n di numeri razionali tali che

$$\lim_n x_n = x.$$

Esercizio 4. Si dica se le seguenti successioni hanno limite al variare del parametro reale $\alpha > 0$. In caso affermativo lo si calcoli

$$\frac{\sqrt{\alpha\, x^2 - 3}}{2\,x + 5}, \quad \frac{\sqrt{3n^2 - 1}}{\sqrt[3]{\alpha\, n^3 - 7}}, \quad \frac{3\,n^2 + \alpha\, n^5 - 1}{n!}, \quad \frac{3^n\, n^\alpha}{5^n - n^3}, \quad \log n^\alpha\ \sin n$$

$$\alpha^n - \frac{3}{n^\alpha}, \quad (1-\alpha)^n, \quad \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 - n^3}}{3\, n^\alpha - n}, \quad \frac{\log n^5}{n^\alpha}, \quad \sqrt[3]{\alpha\, n}\ \cos(n^{-\alpha})$$

Esercizio 5. Sia x_n una successione tale che $x_1 = 1$ e $\lim_n x_n = 0$. Si provi che

- esiste il massimo di x_n;
- $\inf x_n \leq 0$.

Esercizio 6. Una successione a_n si dice periodica se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n+m} = a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si caratterizzino le successioni periodiche convergenti.

Esercizio 7. Per qualsiasi numero reale x, la funzione parte intera di x, denotata con $[x]$, è definita come

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}.$$

Si chiede:

- se x_n è convergente, allora è convergente anche $[x_n]$?
- se $[x_n]$ è convergente, allora è convergente anche x_n ?
- se x_n è divergente (positivamente o negativamente), allora è divergente anche $[x_n]$?
- se $[x_n]$ è divergente (positivamente o negativamente), allora è divergente anche x_n ?

Si provino le implicazioni di sopra o si trovino controesempi.

Esercizio 8. Caratterizzare tutte le successioni per cui nessuna sottosuccessione è convergente.

Esercizio 9. Dato un parametro reale α, si dica se le seguenti succesioni definite per ricorrenza hanno limite e, in caso positivo lo si calcoli, al variare di α

$$\begin{cases} x_1 & = \alpha \\ x_{n+1} & = \min\left\{-\frac{3}{2}, x_n\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = \alpha \\ x_{n+1} & = \min x_n^2 - 1 \end{cases}$$

Esercizio 10. Data un parametro reale α, si consideri la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} x_1 & = \alpha \\ x_{n+1} & = 3\,x_n - 10 \end{cases}$$

Posto $\alpha = 1$, si chiede

- dire se è definitivamente di segno costante positiva;
- dire se è monotona;
- determinare, se esiste, il limite;
- determinare, se esiste, una forma esplicita di x_n.

Affrontare le stesse questioni di sopra per α qualsiasi.

Esercizio 11. Dato un parametro reale $\alpha \neq 0$, si determinino i limiti di tutte le sottosuccessioni delle seguenti succesioni definite per ricorrenza, al variare di α

$$\begin{cases} x_1 & = \alpha \\ x_{n+1} & = \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = \alpha \\ x_{n+1} & = \frac{1}{x_n^2+1} \end{cases}$$