Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2017/18

Analisi (I. Birindelli, M.Marchi, A. Pozio, A. Siconolfi)

Scheda 2 – 5 ottobre 2017

Esercizio 1. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi seguenti

$$E := \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 + x - x^2 > 0\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 \cos x \geq 1\}.$$

Indicare se si tratta di massimo e minimo.

Esercizio 2. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$E := \left\{\frac{2n}{1+n^2} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Indicare se si tratta di massimo e minimo.

Esercizio 3. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$E := \left\{\frac{1+m^2}{1+n+m} \,:\, m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Indicare se si tratta di massimo e minimo.

Esercizio 4. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni

$$|x-3|(x^2-3x+2) \leq 0, \qquad \sin^2 x - \sin x - 2 > 0, \qquad \frac{1}{\cos x} > 0, \qquad |x-1| - |2x+1| < 3.$$

Esercizio 5. Nei grafici di funzioni allegati determinare, quali funzioni sono limitate, quali sono iniettive, quali monotone (e per quelle non monotone determinare gli intervalli di monotonia), quali sono pari, quali sono dispari, quali sono periodiche, quali sono invertibili. Per le funzioni invertibili disegnare il grafico della funzione inversa. Se il primo grafico è il grafico della funzione $f(x)$, disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$f_1(x) = f(x+1)$, $f_2(x) = f(x) + 1$, $f_3(x) = -f(x)$, $f_4(x) = |f(x)|$, $f_5(x) = max(f(x), 0)$, $f_6(x) = f_1(-x)$.

Esercizio 6. Mostrare **usando la definizione** la validità di

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2+3n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = 1.$$

Esercizio 7. 1)Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 1$ allora definitivamente la successione è strettamente maggiore di 1.

2) Costruire una successione a_n che converge a 1 con infiniti termini strettamente maggiori di 1 e infiniti termini strettamente minori di 1.

Esercizio 8. Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}, \qquad \lim_{n\to+\infty} n a_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n a_n + 1}{n^2+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}.$$

Esercizio 9. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

$$\frac{3\,n^3 + 2\,n + 1}{4\,n^4 + 3\,n^3 + 2}, \qquad (-1)^n + 2, \qquad n + (-1)^n, \qquad \frac{n^2 + n\,\sin(\frac{\pi n}{4})}{2\,n^2 + 3\,n + 1}, \qquad \frac{4\,n^4 - n^3 + 4\,n^2}{2\,n^4 + 3},,$$

$$n^2\,2^{-n}, \qquad \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}, \qquad \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}, \qquad \sqrt{n^2+n} - n,$$

Esercizio 10. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{N}$ studiare la convergenza della successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^\alpha + 2}$$