CALC. DIFF. 24/10/2022 (gli esercizi con * sono difficili).

I) Determinare se le seguenti successioni sono monotone

a) $a_n = \frac{1}{n}$

e) $a_n = \frac{n+1}{n-1}$

b) $a_n = \sin n$

c) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

d)* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (Calcolare $\frac{a_{n+1}}{a_n}$)

II Dimostrare i seguenti limiti

a) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$

c) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+4n} = +\infty$

d) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+2} - n = 0$

III)* Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la successione di Erone

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$$

a) Dimostrare per induzione che $a_n \geq \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(usare che $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \geq 0, \forall x$.)

b) Dimostrare che a_n è monotona (Calcolare $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ e usare il risultato in a)

c) Usando l'unicità del limite, dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{2}$!