LIMITI E CONTINUITÀ

1) Successioni

$$f: \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow f(n) = a_n$$

La successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1) $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad n \geq 1 \quad a_1 = 1, \; a_2 = \frac{1}{2}, \; a_3 = \frac{1}{3} \cdots\cdots$

2) $a_n = (-1)^n \rightarrow a_0 = 1, \; a_1 = -1, \; a_2 = 1, \; a_3 = -1$

3) $\boxed{a_n = \frac{n+1}{n-1}}$, $n \geq 2$, $\quad a_2 = 3, \; a_3 = \frac{4}{2} = 2, \; a_4 = \frac{5}{3}, \cdots \quad a_{152} = \frac{153}{151}$

4) Forma ricorsiva

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Esempio Successione di ERONE $\quad a_0 = 1, \; a_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{9+8}{6}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}4166$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17^2 + 2 \cdot 12^2}{12 \cdot 17}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{289 + 288}{204}\right) = \frac{577}{408} = 1{,}414\cdots\cdots$$

Proprietà elementari

Definizione: Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ allora la successione è limitata superiormente se lo è A.

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata inferiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a_n \geq M \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata se è limitata superiormente e inferiormente

Definizione Diremo che una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è <u>convergente a $\ell \in \mathbb{R}$</u> o che $\boxed{\text{"}\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell\text{"}}$ (<u>il limite per n che tende a più infinito di a_n è ℓ</u>) se

succede il seguente fatto:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0} \quad \exists N = N(\varepsilon) \text{ t.c. } \underline{\forall n \geq N} \implies |a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

Esempio $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad a_n = \frac{1}{n} \quad \ell = 0$

Cosa vogliamo dimostrare:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underline{\underline{N}} = N(\varepsilon) \text{ t.c. } \forall n \geq N \implies \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \underbrace{-\varepsilon < \frac{1}{n}}_{\substack{\text{vero sempre} \\ \frac{1}{n} > 0}} < \varepsilon$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \forall n \geq \frac{1}{\varepsilon} \implies \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon} \implies \text{quindi } N = \frac{1}{\varepsilon}$$

rimane da verificare che $\forall n \geq N$ si ha $\boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon} \iff \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\to N} \leq n$

2) $a_n = (-1)^n$: non esiste nessun $\ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = \ell$.

$(-1)^n$ è limitata ma non ammette limite

$$\boxed{\begin{array}{lll} 3)\ a_n = 1 & \forall n & \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \\ \forall \varepsilon > 0 & \forall n > 1 & 0 = |0| = |\underset{a_n}{\underset{\parallel}{1}} - \underset{\ell}{\underset{\parallel}{1}}| \leq \varepsilon \end{array}}$$

$\ell = 1$: sarà verificata $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = 1$?

¿ È vero che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $|(-1)^n - 1| < \varepsilon$ (*) $\underline{\forall n > N}$? FALSA

oss se $n = 2k$ $(-1)^n = (-1)^{2k} = 1$ $\Longrightarrow |(-1)^{2k} - 1| = 0 \Longrightarrow$ (*) è vera

se $n = 2k+1$ $(-1)^n = -1$ $\Longrightarrow |-1-1| = 2 \not< \varepsilon$ nessun dispari

Gli altri valori di “l” sono stati verificati alla lavagna

<u>Definizione</u>: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>diverge</u> a $+\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

(limite per n che tende a più infinito di a_n è più infinito) se:

$$\forall M>0 \quad \exists N=N(M) \text{ t.c. } \forall n>N \implies a_n \geq M$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se

$$\forall M>0 \quad \exists N=N(M) \text{ t.c } \forall n>N \implies a_n \leq -M$$

<u>Esempio 1</u> $a_n = n^2$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$$\forall M>0 \quad \overset{?}{\exists} \underset{\sqrt{M}}{\underset{\parallel}{N}} = N(M) \text{ t.c. } \underset{\underset{\displaystyle \forall n > \sqrt{M} \implies n^2 \geq M}{\geq}}{\forall n > N} \implies \boxed{n^2 \geq M}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 2^n \geq M \iff \\ \log_2 2^n \geq \log_2 M \\ \Updownarrow \\ n \geq \log_2 M \end{array}}$$

<u>Esempio 2</u> $a_n = 2^n$: $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; $\forall M>0$ $\exists N = \log_2 M$ $\forall n>N \implies 2^n \geq M$

se $n \geq \log_2 M \implies 2^n \geq 2^{\log_2 M} = M$

Esempio $a_n = (-2)^n$ non è limitata ma non è neanche divergente cioè non è verificato nè $\lim_{n\to+\infty} (-2)^n = +\infty$ NO

nè $\lim_{n\to+\infty} (-2)^n = -\infty$ NO

$$a_n = (-2)^n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n = 2k \\ -2^n & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

Definizione: Una successione è <u>monotona crescente</u> se $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$

Una successione è <u>montona decrescente</u> se $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a_{n+1}$

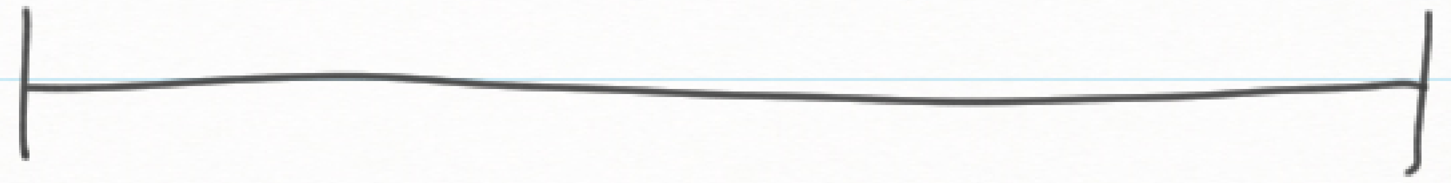
Teorema Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona allora esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$

In particolare se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, altrimenti se non è limitata $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se $\nearrow$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se $\searrow$

$A = \{a_n \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona

se $(a_n)_n$ è monotona crescente $\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup A$

se $(a_n)_n$ è monotona decrescente $\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \inf A$



Dimostrare che: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \quad$ t.c. $\quad n > N \Longrightarrow 1-\varepsilon < \frac{n+1}{n-1} \leq 1+\varepsilon$

$n+1 \geq n-1 \Longrightarrow \frac{n+1}{n-1} \geq 1 \geq 1-\varepsilon \quad \forall n$

$\boxed{\frac{n+1}{n-1} \leq 1+\varepsilon}$ Risolvere in "n" - - $\quad n \geq ? = N$

$\Updownarrow$

$n-1>0 \Longrightarrow (n+1) \leq (1+\varepsilon)(n-1) = n(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)$

$\Updownarrow$

$2+\varepsilon = 1+1+\varepsilon \leq n(1+\varepsilon) - n = \varepsilon n \iff n \geq \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$