Confronti e stime asintotiche

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \infty$$

$\frac{1}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{1} = \infty$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 \\ \infty \\ l \in \mathbb{R},\ l \neq 0 \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

$\{a_n\}$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $\{b_n\}$

$\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso ordine di ∞

non ci sono informazioni sull'ordine degli ∞.

Analogamente per gli infinitesimi : $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

$\frac{0}{0}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 \\ \infty \\ l \in \mathbb{R},\ l \neq 0 \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

$\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine <u>superiore</u> a $\{b_n\}$

$\{a_n\}$ è " " di ordine <u>inferiore</u> a $\{b_n\}$

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso ordine di infinitesimo

<u>Esempio 1</u>: $a_n = n^\alpha$ $\quad b_n = n^\beta \quad \beta > 0$

$\alpha > 0$

allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-\beta} = \begin{cases} +\infty & \alpha-\beta>0 \\ 0 & \alpha-\beta<0 \\ 1 & \alpha-\beta=0 \end{cases}$$

$\alpha - \beta > 0$

$\alpha > \beta$ ordine di infinito di n^α è <u>maggiore</u> dell'ordine di infinito n^β

$\alpha < \beta$ ——— n^α è inferiore ——— n^β

$\alpha = \beta$ ordini di infinito sono uguali

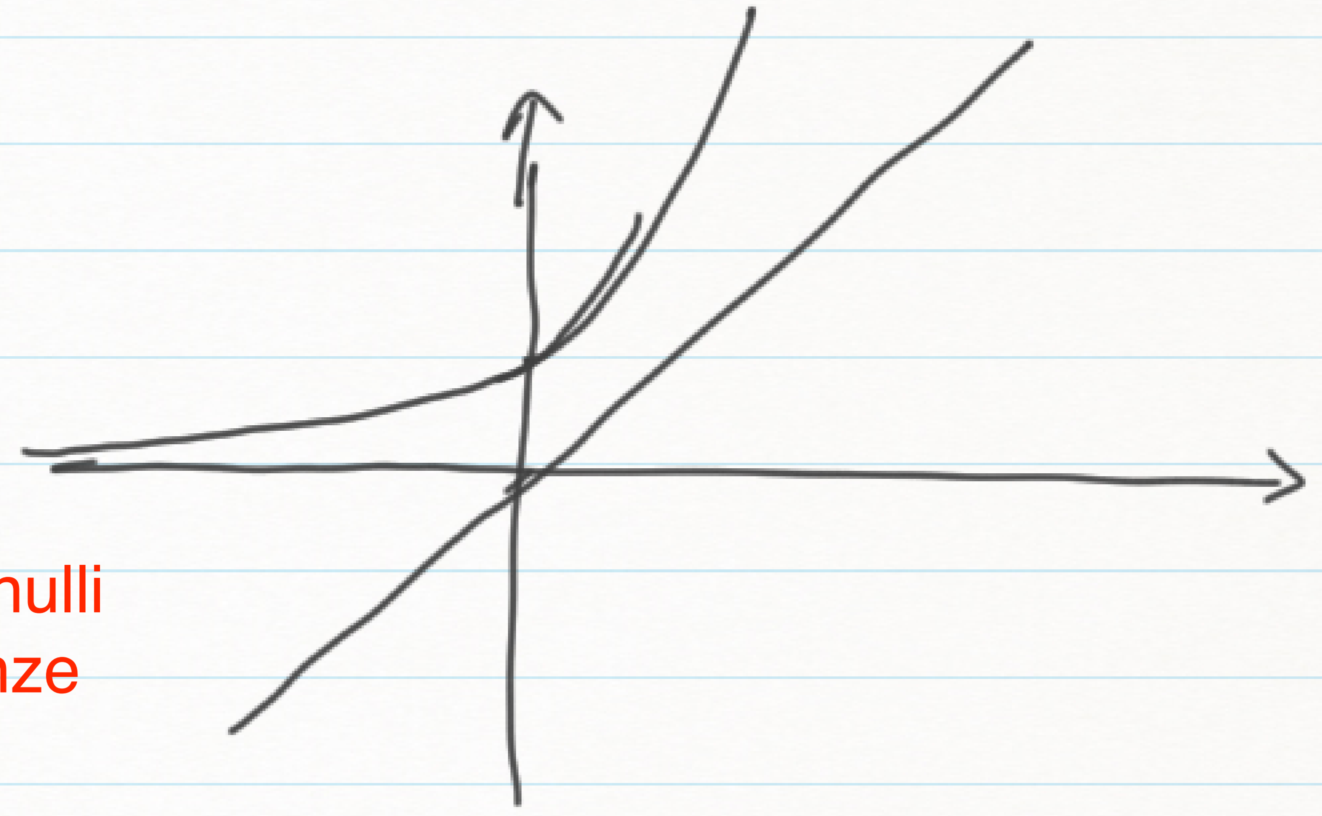
<u>Esempio 2</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 + \sqrt{n} - n}{n^4 + n^2 + n^{3/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1 + \overset{\downarrow 0}{\frac{\sqrt{n}}{n^3}} - \overset{\downarrow 0}{\frac{n}{n^3}}\right)}{n^4\left(1 + \underset{\uparrow 0}{\frac{n^2}{n^4}} + \underset{\uparrow 0}{\frac{n^{3/2}}{n^4}}\right)} = 0$$

mettere in evidenza il termine di grado massimo

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0} \qquad \forall a>1, \ \forall \alpha>0$$

oss: 1) $\boxed{2^x \geq x}$ $\forall x \geq 0$



$$\cancel{\left(2^x = (1+1)^x \geq 1+x > x\right)}$$

Attenzione la disuguaglianza di Bernulli è stata dimostrata solo per le potenze intere

Quindi usiamo la parte intera di x: [x] che verifica

$$\boxed{\underset{\mathbb{N}}{[x]} \leq x \leq \underset{\mathbb{N}}{[x]} + 1}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$$2^x = (1+1)^x \geq (1+1)^{[x]} \underset{\text{Bernulli}}{\geq} 1+[x] \geq x$$

$\boxed{\text{divido per } n^\alpha \text{ e moltiplico per } \frac{2}{\alpha}}$

2) $\log_a 2^x \geq \log_a x$

$x \log_a 2 \geq \log_a x$

$n^{\frac{\alpha}{2}} \log_a 2 \geq \log_a n^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha}{2} \log_a n$

$\boxed{\text{perché } a>1}$ e 1)

$\forall x>0$ scegliamo $\boxed{x = n^{\frac{\alpha}{2}}}$

$$0 \leq \boxed{\frac{\log_a n}{n^\alpha}} \leq \frac{2}{\alpha} \log_a 2 \cdot \frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha} = \frac{2}{\alpha} \log_a 2 \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}} \to 0$$

$\frac{\alpha}{2} < \alpha$

Corollario: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ $\quad \boxed{\forall \alpha>0 \quad e \quad \forall a>1}$

$\alpha=1$ $\quad \frac{n}{a^n} = \frac{n \log a}{a^n \log a} = \boxed{\frac{\log a^n}{a^n}} \cdot \frac{1}{\log a} \longrightarrow 0 \quad \forall a>1$

$\downarrow$

0 perché $a>1 \Longrightarrow a^n \to +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{\alpha}})^n}\right]^\alpha \longrightarrow 0$$

$a>1$ $\Longrightarrow a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$

$\alpha>0$

Gli ordini di infinito sono ordinati in questo modo: $\boxed{\text{"}\log n\text{"} \ \text{"}\le\text{"} \ \text{"}n^\alpha\text{"} \ \text{"}\le\text{"} \ \text{"}a^n\text{"}}$

$$\sqrt{n^2} = n$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)n$$

$$\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)n = \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)\frac{n}{\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right]} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Verificare che con la calcolatrice
viene un risultato diverso

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{\frac{1}{n}}}$$

∞^0 F. I.

$x = e^{\log x} \quad \forall x>0$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$b > 1$

$[b] \leq b < [b]+1$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$$\frac{b^n}{n!} = \underbrace{\overbrace{\frac{b \cdot \ldots \cdot b}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}}^{n \text{ termini}}}_{n \text{ termini}} = \overbrace{\boxed{\frac{b \quad b}{\underbrace{1 \cdot 2 \quad [b]}_{}}}}^{K} \cdot \frac{b \ldots b}{([b]+1) \ldots n}$$

$[b]$ termini $\qquad n-[b]$ termini

$$= K \cdot \underbrace{\frac{b}{[b]+1} \cdot \frac{b}{[b]+2} \cdots}_{\leq 1} \frac{b}{n} \leq K \cdot \frac{b}{n} \to 0$$

$$K = \frac{b^{[b]}}{[b]!}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$$ Esercizio

Limiti di Funzioni

Definizione Sia $x_0 \in I$ intervallo di $\mathbb{R}$, Sia $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Sia $f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ diremo che

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$ se $\forall$ successione $\{x_n\}$ che verifica $\boxed{\begin{array}{l} x_n \in I \setminus \{x_0\} \quad \forall n \\ \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \end{array}}$

"limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è ℓ"

si ha che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

Esempio: $\underline{\lim_{x \to 0}} \, x \sin \frac{1}{x} = \underline{0}$ $\quad \{x_n\}$ tale che $x_n \neq 0$ | $\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 0}$

$x_0 = 0$ e $\ell = 0$ $\quad f(x_n) = x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$

devo dimostrare $\longrightarrow$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \text{ t.c. } n > N \quad \left| x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| < \varepsilon}$

per le successioni che verificano $\longrightarrow$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 \text{ t.c. } |x_n| < \varepsilon \;\; \forall n > N_0}$

osserva che

$\left| x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| \leq |x_n| \leq \varepsilon$

basta scegliere $N = N_0$

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Tesi: Data una qualsiasi successione che verifica e $x_n \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$$ cioè che verifica $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \text{ t.c. } |x_n| < \varepsilon \quad \forall n > N_0}$

$N_0 = N_0(\varepsilon, \{x_n\})$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0 \ ? \quad \text{cioè}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \text{ t.c. } \forall n > N \qquad \left| x_n \sin \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$$

Se scegliamo $N = N_0 \Longrightarrow \forall n > N \quad \left|x_n \sin \frac{1}{x_n}\right| \leq \overbrace{|x_n| \underset{n > N_0}{\leq} \varepsilon}$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} 2x = 2}$$

$x_0 = 1$, $\ell = 2$

$\forall \{x_n\}$ t.c. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$ $x_n \neq 1$ (per esempio $x_n = 1 + \frac{1}{n}$

o $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

o $x_n = \log\left(e + \frac{1}{n}\right)$

$x_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$

per dire che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \text{ t.c. } n > N_0 \implies |x_n - 1| < \varepsilon}$$

$N_0 = N_0(\varepsilon)$

$\Downarrow$?

$$\lim_{n\to+\infty} 2x_n = 2$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $\forall n > N \implies |2x_n - 2| < \varepsilon$

$N = N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $\forall n > N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \implies |x_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |2(x_n - 1)| < \varepsilon$

$|2(x_n-1)| = |2x_n - 2|$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

$\{x_n\}$ t.c. $x_n \neq 0$, $x_n \to 0$

$x_n \neq 0 \Rightarrow f(x_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1$

Per definizione $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

NON ESISTE $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ infatti sia $\boxed{x_n = \frac{1}{2\pi n}}$

$x_n \to 0$

$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) = \sin(2\pi n) = 0$

$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

$x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ $\quad f(x_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(x_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 1$

Def

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

se $\forall \{x_n\}$ t.c. $x_n \to +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

se $\forall \{x_n\}$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

Teorema $\boxed{\text{Unicità del limite}}$

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora ℓ è unico

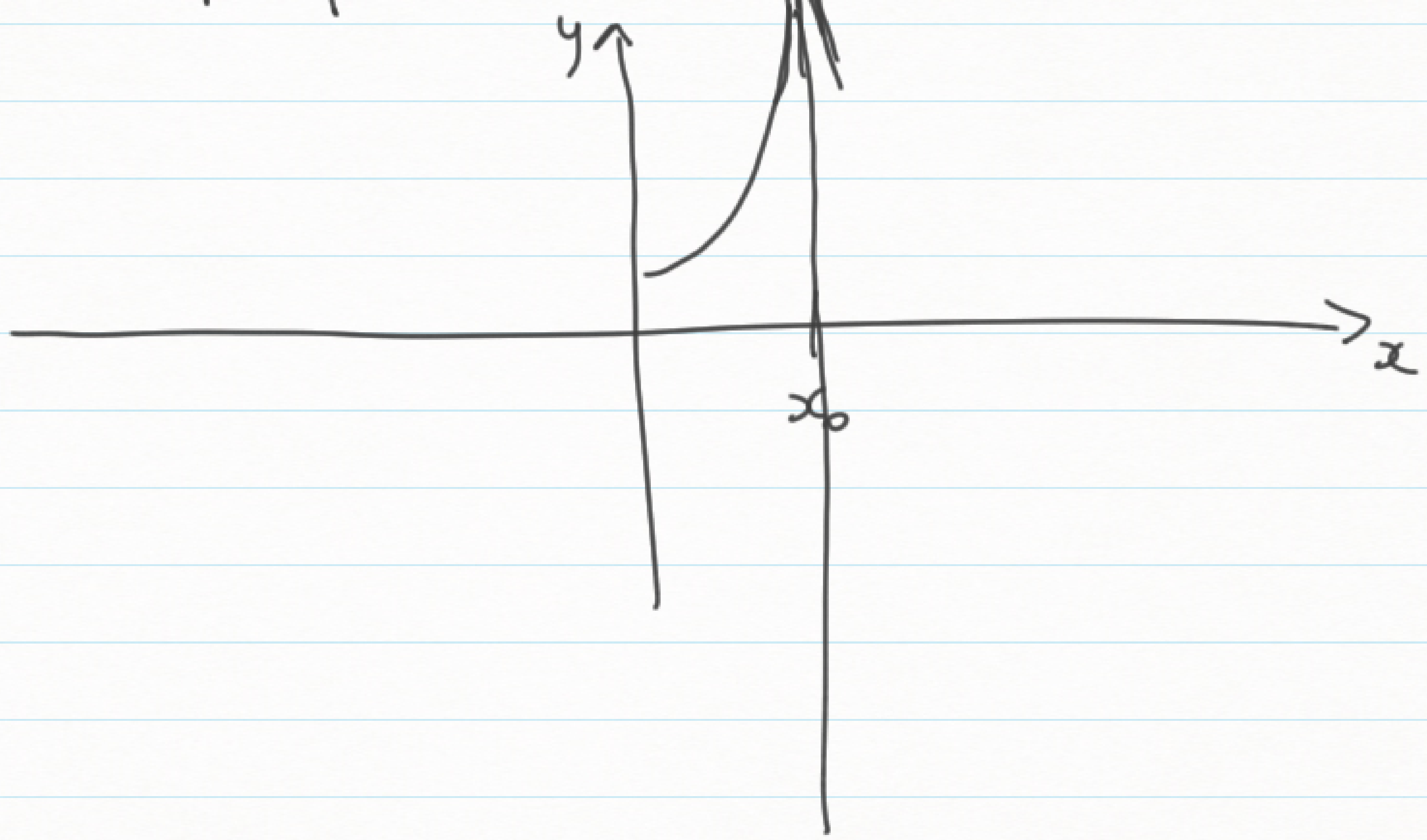
$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

se $\ell_1 \neq \ell_2$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$ se $\{x_n\}$ t.c. $x_n \to x_0$

$\lim_{n \to +\infty} f(x_n)$ sarebbe uguale a ℓ_1 e a ℓ_2 che è assurdo.

Definizione $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ \uparrow \\ \mathbb{R}}} f(x) = +\infty \Rightarrow$ f ha un asintoto verticale $x = x_0$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f ha un asintoto orizzontale in $+\infty$ $\boxed{y=\ell}$