**Secondo Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.**

**Esercizio** Consideriamo la successione di funzioni

$$\begin{cases} x_o(t) = 1 \\ x_n(t) = 1 + \int_0^t x_{n-1}^2(s)ds \end{cases}$$

a) Determinare esplicitamente $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

$$x_1(t) = 1+\int_0^t 1ds = 1+t,\ x_2(t) = 1+\int_0^t (1+s)^2 ds = 1+\frac{1}{3}[(1+t)^3-1] = 1+t+t^2+\frac{1}{3}t^3.$$

b) Dimostrare che per ogni $M > 1$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $t \in I_\delta := (-\delta, \delta)$, per ogni $n$,

$$|x_n(t)| \le M.$$

Prendiamo $\delta \le \frac{M-1}{M^2}$ e dimostriamo che

$|x_{n-1}(t)| \le M \Rightarrow |x_n(t)| \le M$ per $t \in (-\delta, \delta)$.

Infatti, per questa scelta di $\delta$

$$|x_n(t)| \le 1 + |\int_0^t x_{n-1}^2(s)ds| \le 1 + M^2 t \le 1 + M^2\delta \le M.$$

c) Dimostrare che per ogni $t, s \in I_\delta$ e per ogni $n$

$$|x_n(t) - x_n(s)| \le M^2|t-s|.$$

Infatti, sempre per induzione $|x_1(t) - x_1(s)| = |t-s| \le M^2|t-s|$. Supponiamo che sia vero per $n-1$:

$$|x_n(t) - x_n(s)| \le |\int_s^t x_{n-1}(r)^2 dr| \le M^2|t-s|.$$

d) Dimostrare che $x_n \in C^1(I_\delta)$.

e) Dimostrare che esiste $x(t) = \lim_{n\to+\infty} x_n(t)$. Determinare $x(.)$.

Dimostriamo che $|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le |t|^n$.

Questo è vero per $n = 1$, supponiamo sia vero per $n-1$ e dimostriamolo per $n$.

$$|x_n(t)-x_{n-1}(t)| \le |\int_0^t x_{n-1}^2(s)-x_{n-1}^2 ds| \le 2M| \le |\int_0^t s^{n-1}ds| \le \frac{2Mt^n}{n} \le |t|^n.$$

Se ne deduce che per $\delta < 1$, $x_n$ è una successione di Cauchy e per la completezza $x(t) = \lim_{n \to +\infty} x_n(t)$ uniformemente in $(-\delta, \delta)$.

Usando l'unicità del limite e l'uniforme convergenza, $x(t)$ verifica

$$x(t) = 1 + \int_0^t x^2(s)ds, \text{ i.e. } x'(t) = x^2(t), \ x(0) = 1$$

risolvendo l'equazione otteniamo:

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$