EQUAZIONI DIFFERENZIALI

14/05/2012

ESERCIZIO 1. Considerare il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

dove A è la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

e Φ_A^t il flusso associato. Calcolare, in funzione di a e b,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \Phi_A^t(\Omega)$$

dove Ω è il quadrato $[0,1] \times [0,1]$.

ESERCIZIO 2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$F(x) = J\,x - |x|^2\,x$$

dove J è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- dimostrare che $(0,0)$ è l'unico punto di equilibrio di F
- calcolare la matrice jacobiana $DF(0)$ e determinare i suoi autovalori
- calcolare $|x(t)|^2$ dove $|x(t)|$ è soluzione di

$$\dot{x} = F(x) \quad , \quad x(0) = x_0$$

  e dedurne che $|x(t)| \to 0$ per $t \to +\infty$ qualunque sia x_0.

ESERCIZIO 3. Sia $z(t) = (x(t), y(t))$ una soluzione del sistema di Lienard in $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = y - \frac{1}{3}x^3 + x \quad , \quad \dot{y} = -x$$

- dimostrare che $(0,0)$ è l'unico punto di equilibrio del sistema
- verificare che $\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = -2x(t)\frac{1}{3}x^3(t) - x(t)$ e studiare $\lim_{t\to+\infty} z(t)$
- calcolare la matrice jacobiana del campo $F(x,y) = (y - \frac{1}{3}x^3 + x, -x)$ e determinare i suoi autovalori.