Primo Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Riscrivere le seguenti equazioni come sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

$$(a)\, x'' = t + x + e^{x'},\ (b)\, x''' = x \log x' + x'',\ (c)\, x''' = x f(x') g(x'')$$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy e determinare gli intervalli di esistenza della soluzione

$$\begin{cases} x' - tx = x^3 \\ x(0) = 1 \end{cases},\ \begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

3. Sia f una funzione continua e crescente. Consideriamo il problema di Cauchy

$$y'(x) = \frac{y f(x)}{1+y},\ y(0) = y_o > 0.$$

Trovare lequazione che esprime la soluzione in forma implicita e verificare che non esplode in tempo finito. Dimostrare inoltre che la soluzione è crescente, convessa e tende a $+\infty$ all'infinito.

4. Consideriamo il moto unidimensionale di una particella di massa m espressa da $x(t)$ sottoposta alla forza $F(x)$. Determinare il potenziale, l'equazione del moto, l'energia totale e tracciarne le curve di livello e dove possibile trovare l'integrale generale dell'equazione per i seguenti valori di F

$$F(x) = -Kx,\ F(x) = -Kx^2,\ F(x) = \frac{K}{x}, F(x) = x - x^3.$$

5. Siano $a(t)$ e $b(t)$ due funzioni continue in un intervallo che contiene t_o. Dimostrare che se esiste è unica la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x^2 + b(t) \\ x(t_o) = x_o \end{cases}$$