Secondo Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^2(t) + 1 \\ x_2'(t) = x_1^2(t) \\ (x_1(0), x_2(0)) = (a_1, a_2) \end{cases}$$

   a) Dimostrare che, per esempio scegliendo $(a_1, a_2) = (1, 0)$, esiste $t_1 < +\infty$ tale che $\lim\limits_{t\to t_1} |(x_1(t), x_2(t))| = +\infty$. (Suggerimento: Si ricorda che per ogni vettore $\vec{u} = (u_1, u_2)$,

$$|\vec{u}|_2 := (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}} \le |u_1| + |u_2| \le \sqrt{2}|\vec{u}|_2.$$

   Usare la formulazione "forte" del Lemma di Gronwall.)

   b) Stimare t_1 dall'alto.

   c) Trovare una funzione $\psi(x_1, x_2)$ tale che $\psi(x_1(t), x_2(t)) = cte$, determinare la costante in termini di a_1, a_2. (Suggerimento: calcolare $x_1' x_2'$).

   d) Considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x_1'(t) = f(x_2) \\ x_2'(t) = g(x_1) \\ (x_1(0), x_2(0)) = (a_1, a_2). \end{cases}$$

   con f e g continue in $\mathbb{R}$. Trovare una funzione $\psi(x_1, x_2)$ tale che $\psi(x_1(t), x_2(t)) = cte$, determinare la costante in termini di a_1, a_2.

2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x)(1 - t^2) \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

   con $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione C^1 tale che $f(p) = 0\ \forall p \in Z$.

   a)Dimostrare che per ogni x_o la soluzione massimale è globale.

   b)Al variare di x_o studiare il comportamento di $x(t)$ per $t \to \pm\infty$.

3. Consideriamo la successione di funzioni

$$\begin{cases} x_o(t) = 1 \\ x_n(t) = 1 + \int_0^t x_{n-1}^2(s)ds \end{cases}$$

a) Determinare esplicitamente $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

b) Dimostrare che per ogni $M > 1$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $t \in I_\delta := (-\delta, \delta)$, per ogni n,

$$|x_n(t)| \leq M.$$

(Suggerimento: usare la dimostrazione per induzione).

c) Dimostrare che per ogni $t, s \in I_\delta$ e per ogni n

$$|x_n(t) - x_n(s)| \leq M^2|t - s|.$$

d) Dimostrare che $x_n \in C^1(I_\delta)$.

e) Dimostrare che esiste $x(t) = \lim_{n\to+\infty} x_n(t)$. Determinare $x(.)$.