Terzo Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - 2x' + (1 + \frac{1}{n^2})x = 0 \\ x(0) = 0; \ x'(0) = 1. \end{cases}$$

   a) Determinarne la soluzione $x_n(t)$

   b) Dimostrare che per ogni $M > 0$, x_n converge a $x_o(t) = te^t$ uniformemente in $(-M, M)$.

   c) Dimostrare che esiste una successione t_n tale che

$$\lim_{n \to +\infty} x_n(t_n) - x_o(t_n) = +\infty.$$

   (Spiegare perché questo non è in contraddizione con il teorema delle perturbazioni regolari).

2. Sia $x(t)$ una soluzione non nulla dell'equazione

$$x'' + bx' + cx = 0$$

   a) Determinare delle condizioni su b, c che

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

   b)Determinare sotto quali ipotesi $x(t)$ si annulla infinite volte.

3. Consideriamo x la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0; \ x'(0) = 1 \end{cases}$$

   Supponiamo che sia analitica e $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$.

   a) Calcolare a_o e a_1.

   b) Determinare le equazioni soddisfatte da a_i e calcolare gli a_i .

   c) Verificare che il risultato ottenuto non è in contraddizione con il risultato atteso.

4. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$x'' + x' = f(t)$$

sia utilizzando la formula di risoluzione per le equazioni del primo ordine, che usando il metodo di variazioni delle costanti. Confrontare.

5. Determinare tutti i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $x(t) = t^\alpha$ sia soluzione dell'equazione

$$t^2 x'' + t x' - x = 0.$$

Determinare l'insieme delle soluzioni. Trovare la soluzione che verifica $x(1) = 1$, $x'(1) = 2$ e determinare l'intervallo di esistenza.

6. Trovare l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che esista una soluzione non nulla del seguente problema al contorno

$$\begin{cases} x'' + x' + \lambda x = 0 \\ x(0) = 0; \ x(1) = 0 \end{cases}$$

7. Consideriamo l'equazione del terzo ordine

$$x''' - 7x' + 6x = f(t). \tag{0.1}$$

a)Dimostrare che V_o l'insieme delle soluzioni dell'equazione (0.1) con $f(t) = 0$ è uno spazio vettoriale di dimensione 3.

b)Determinare una base di V_o.

c) Per $f(t) = e^{-t}$ determinare l'insieme delle soluzioni di (0.1).