Quarto Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Consideriamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2. \end{cases}$$

   a) Scrivere tale sistema come un'equazione del secondo ordine e trovare l'integrale generale

   b) Determinare le soluzioni del problema di cauchy con $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$ e con $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 1)$.

   c)Dedurre per $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, e^{At}.

2. Usando un procedimento analogo a quello usato nel precedente esercizio, per $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinare e^{At}.

3. Data A una matrice costante, dimostrare che per una funzione reale $f(t) \in C^1$

$$\frac{d}{dt} e^{Af(t)} = Af'(t) e^{Af(t)}.$$

   Usare la formula precedente per trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x_1' = t^2 x_1 + 2t^2 x_2 \\ x_2' = t^2 x_1, \\ x_1(0) = 1, \; x_2(0) = -2. \end{cases}$$

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Verificare che $m(A) = (A - I)^2 (A - 3I) = 0$ (dove con 0 si intende la matrice nulla).

   b) Determinare due vettori u e w che formano una base dello spazio dei vettori che verificano $(A - I)^2 v = 0$. Calcolare $e^{At} u$ e $e^{At} w$.

   c) Usando i conti precedenti, calcolare e^{At}.

d) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$X' = AX, X(0) = (1, 2, -1).$$

5. Siano A e B due matrici $N \times N$ che commutano cioè tali che $AB = BA$. Dimostrare che $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) A^{k-i} B^i$.

6. Siano $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $C \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se α non e un autovalore di A, allora esiste una soluzione particolare del sistema lineare non omogeneo
$$Y' = AY + e^{\alpha t} C.$$
Determinare l'insieme delle soluzioni di tale equazione.

7. Sia $A_\varepsilon = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{array} \right)$ Calcolare e^{A_ε}. Determinare se $\lim_{\varepsilon \to 0} e^{A_\varepsilon} = e^{A_o}$.

.