Quinto Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Sia
$$x'' + x = f(t).$$
a) Per $f(t) = 0$ dimostrare che il vettore $(x(t), x'(t))$ è costante in modulo.
b)Per $f(t) = \frac{1}{\sin^3 t}$ trovare l'integrale generale, usando la formula di Duhamel.

2. Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2. \end{cases}$$
Determinare per quali problemi di Cauchy, la soluzione $(x_1(t), x_2(t))$ rimane su una retta del piano.

3. Determinare l'integrale generale del sistema
$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

4. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ che abbia due autovalori complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$ con $(\beta \neq 0)$ dimostrare che la matrice $J_A = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I)$ verifica $J_A^2 = -I$. Calcolare J_A^{2k} e J_A^{2k+1}. Confrontare con il risultato dell'esercizio precedente.

5. Dati $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Determinare le soluzioni periodiche del sistema
$$\begin{cases} x' = ay + bz \\ y' = -ax + cz \\ z' = -bx - cy \end{cases}$$

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$.

Calcolare e^{At}. Risolvere
$$\begin{cases} x' = Ax + f(t) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

.