Sesto Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Sia B una matrice invertibile. Determinare le soluzioni del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x' = e^{Bt}x \\ x(0) = x_o. \end{cases}$$

2. Determinare dei valori $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che esista una soluzione non nulla del problema di Dirichlet
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 & (x,y) \in (0,L) \times (0,M) \\ u(0,y) = u(x,0) = u(L,y) = u(x,M) = 0 \end{cases}$$
Suggerimento: scrivere $u(x,y) = f(x)g(y)$ e trovare le equazioni soddisfatte da f e g.

3. Sia $\xi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} x_1' = -tx_2 \\ x_2' = tx_1 \\ (x_1(0), x_2(0)) = (a,b) \neq (0,0) \end{cases}$$
Consideriamo lo sviluppo in serie di $\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k$.

   a) Dimostrare che $\xi_{2k+1} = (0,0)$.

   b) Determinare ξ_{2k} in termini di $\xi(0)$. Trovare lo sviluppo in serie della soluzione.

   c) Dimostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $x_1^2(t) + x_2^2(t) = cte$, se ne deduca la soluzione del problema di Cauchy, confrontare con il risultato della domanda b).

   d) Sia A_1 una matrice $N \times N$. Ispirandosi ai conti fatti nei punti precedenti, determinare le soluzioni del problema di Cauchy
$$X' = tA_1X,\ X(0) = X_o.$$
   In generale, data una funzione f continua in $\mathbb{R}$ trovare le soluzioni del problema di Cauchy
$$X' = f(t)A_1X,\ X(0) = X_o.$$

4. Sia l'equazione differenziale

$$t^2y'' + ty' - y = 0$$

che ammette come soluzione $y_1(t) = t$. Determinare $y_2(t)$ un'altra soluzione dell'equazione linearmente indipendente. (Suggerimento: Scrivere $y_2(t) = y_1(t)u(t)$.)

5. Determinare, usando la formula di Duhamel, l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -x + y + 1 \\ y' = x - y \end{cases}$$

.