Settimo Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Esercizio 1: Consideriamo l'equazione definita in $x > 0$, $x^2 u'' + k(u - u^3) = 0$.

   a) Dimostrare che $v(t) = u(e^t)$ verifica

   $$v'' - v' + k(v - v^3) = 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

   b)Scrivere l'equazione in v come un sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

   $$X' = F(X).$$

   Determinare i punti critici del sistema e la loro natura.

   c) Dimostrare che non esiste una soluzioni v tale che

   $$\lim_{t \to -\infty} v(t) = -1 \text{ e } \lim_{t \to +\infty} v(t) = 1.$$

   (Suggerimento: moltiplicare l'equazione verificata da v per v', integrare tra T e $-T$, lasciar convergere T all'infinito)

2. (digressione) Sia C una matrice 2×2 con autovalori reali, positivi e distinti, dimostrare che esiste B tale che $e^B = C$. Verificare che B può essere scelta in modo tale che i suoi autovalori siano il logaritmo degli autovalori di C. (Suggerimento: diagonalizzare C e usare la definizione di esponenziale.)

3. Per $a(t)$ funzione scalare periodica di periodo T e per una matrice A reale consideriamo il sistema

   $$x' = a(t)Ax.$$

   a) Determinare C la matrice di monodromia cioè tale che $X(t + T) = X(t)C$ (dove $X(t)$ la soluzione matriciale del sistema fondamentale associato al sistema di equazioni differenziali) e i suoi autovalori, cioè gli esponenti caratteristici del sistema.

   b) Determinare gli esponenti di Floquet, cioè gli autovalori della matrice B tale che $e^{BT} = C$.

4. Consideriamo il sistema $x' = A(t)x + g(t)$ con A una matrice $N \times N$ periodica di periodo T e g una funzione vettoriale periodica di periodo T.

   a) Se $W(t)$ la matrice soluzione di $W' = A(t)W$, con $W(t_o) = I$. Scrivere la formula di Duhamel per le soluzioni del sistema dato.

   b) Determinare sotto quali condizioni su W e g esiste C una matrice tale che $x(t+T) = Cx(t)$.

.