Nono Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Esercizio 1: Sia C una curva nello spazio $\mathbb{R}^3$, parametrizzata da $(x(s), y(s), z(s))$ con $s \in (a, b)$ parametrizzata dalla distanza cioè tale che la velocità $v(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ verifichi $|v(s)| = 1$.

   a) Verificare che $v'(s)$ è un vettore ortogonale $v(s)$.

   b) Sia (la curvatura) $k(s) = |v'(s)|$ e $N(s) = \frac{v'(s)}{k(s)}$ e $B(s) = v(s) \otimes N(s)$ ($\otimes$ è il prodotto vettoriale). Dimostrare che $B'(s)$ è parallelo a $N(s)$.

   c) Chiamiamo (torsione) $\tau(s)$ tale che $B'(s) = -\tau(s)N(s)$. Dimostrare che $N'(s) = -k(s)v(s) + \tau(s)B(s)$.

   Il sistema ottenuto
$$\begin{cases} v'(s) = k(s)N(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)v(s) + \tau(s)B(s) \end{cases}$$
   si chiama di Frenet Serret.

   d) Risolvendo il sistema di Frenet Serret determinare le curve c che hanno torsione e curvatura costante.

2. Sia il sistema
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -g(x_1) \end{cases}$$
   a) Dimostrare che si tratta di un sistema Hamiltoniano, determinare l'Hamiltoniana.

   b)Usando il fatto che l'Hamiltoniana è costante lungo le traiettorie, dimostrare che lungo la traiettoria che passa per $(b, 0) \neq (0, 0)$:
$$\frac{x_1'}{\sqrt{2(G(b) - G(x_1))}} = 1.$$
   c) Dimostrare che se per qualche $b \neq 0$ la traiettoria è periodica di periodo T allora esiste $a \neq 0$ tale che $(a, 0)$ appartiene alla traiettoria.

   d) Per simmetria dimostrare che $\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{2(G(b)-G(u))}}$

   e) Fare i conti nel caso $g(x_1) = x_1 + x_1^3$.

.