Decimo Foglio di Esercizi per il Corso di Equazioni Differenziali, a.a. 11/12.

1. Esercizio 1: . a) Individuare i punti critici del sistema

$$\begin{cases} x' = ax - y^2 \\ y' = -x + by \end{cases}$$

   e studiarne la natura nei casi $(a, b) = (1, -1)$, $(a, b) = (1, 2)$.

   b) Determinare le coppie (a, b) tale che il sistema è Hamiltoniano. In quel caso determinare tutte le orbite del sistema.

   c) Per $(a, b) = (0, 0)$, dimostrare che y verifica $(y')^2 = -\frac{2}{3}y^3 + 2C$.

2. Esercizio 2. Determinare tutte le orbite dei sistemi di equazioni

$$\begin{cases} x' = e^{2y} \\ y' = \frac{2}{x} \end{cases}, \begin{cases} x' = x - \cos y \\ y' = -y - x^2 \end{cases}$$

3. Esercizio 3. Sia B_R il disco di raggio R e centro l'origine di $\mathbb{R}^2$. Sia F un campo vettoriale di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x) \cdot x \leq 0 \text{ per } |x| = R.$$

   a)Dimostrare che se Φ è il flusso associato a F allora $\Phi^t(B_R) \subset B_R$ per ogni $t > 0$.

   b)Dimostrare che $\Phi^t(B_R) \subset \Phi^s(B_R)$ per $t > s$.

   c)Sia $B = \cap_{t>0}\Phi^t(B_R)$. Dimostrare che $L_\omega(x) = B$ per ogni $x \in B_R$.

   d)Dimostrare che div$F < 0$ implica che $|B| = 0$

   e)Dimostrare che se F non ha punti critici in B_R allora esiste un orbita periodica.

4. Esercizio 4. Sia il sistema di Volterra-Lotka, con a, b, c, d costanti positive

$$\begin{cases} x' = (a - cy)x \\ y' = (-b + dx)y. \end{cases}$$

   Determinare l'insieme dei punti critici e studiare i sistema linearizzati.

.