Primo esonero di Equazioni Differenziali a.a. 2011/12

Saranno valutati i quattro migliori esercizi svolti.

1. Sia il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = \frac{t\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-t^2}} \\ x(0) = x_o. \end{cases}$ a) Per $x_o = \frac{1}{2}$ determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy *Si sfrutta la separazione di variabile*

$$\frac{x'}{\sqrt{1-x}} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Integrando si ottiene $-2\sqrt{1-x} = -\sqrt{1-t^2} + C$ *con* $C = -2\sqrt{\frac{1}{2}} + 1$. *La soluzione è definita per* $t \in (-1,1)$.

b) Esiste un dato iniziale per cui la soluzione è costante? *Se* $x_o = 1$ *allora* $x(t) = 1$ *è soluzione in* $(-1,1)$.

2. a) Dimostrare che per ogni $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^3 \arctan x^2 + \sin x \\ x(t_o) = x_o. \end{cases}$$

Basta dimostrare che $f(t,x)$ *è continua e Lipschitziana (infatti la funzione è derivabile e la sua derivata* $f_x = t^3 \frac{2x}{1+x^4} + \cos x$ *è localmente limitata).*

b) Verificare che per ogni $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione massimale esiste $\forall t \in \mathbb{R}$ *Basta osservare che* $f(t,x)$ *è limitata in* $(-T,T) \times \mathbb{R}$.

c) Dimostrare che se $x_o > 0$ allora $x(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. *Basta notare che* $x(t) \equiv 0$ *è soluzione dell'equazione con dato iniziale* $x_o = 0$, *quindi per il teorema di esistenza e unicità nessuna altra soluzione può verificare* $x(t) = 0$, *e se si "parte sopra si rimane sopra".*

d) Verificare che se $x_o > 0$ allora $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

Si osservi che per $t > 1$, $f(t,x) \geq f(1,x) \geq 0$ *per ogni* $x > 0$. *Quindi per* $t > 1$, *la funzione* $x(t)$ *è crescente, quindi non può tendere a zero. Ma se tende a* $x_1 > 0$ *allora* x' *diverge e dunque diverge* $x(t)$.

3. Determinare l'integrale generale del sistema $x' = A_o x$ dove

$$A_o = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

det$(A_o - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4)$ *quindi* A_o *ha tre autovalori* $\lambda_o = 1$, $\lambda_1 = 2i$, *e* $\lambda_2 = -2i$. *Si verifica che i tre autovettori corrispondenti sono* $\vec{v}^0 = (1,0,1)$, $\vec{v}^1 = (-1,-2i,1)$ *e* $\vec{v}^2 = (-1,2i,1)$. *Per cui l'integrale generale è dato da*

$$x(t) = C_o e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \cos(2t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \sin(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'insieme dei dati iniziali per cui la soluzione del problema di Cauchy associato è periodica. *Perchè la soluzione sia periodica il dato iniziale dovrà essere nel piano generato dai vettori* $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. a) Per b, c, d, f funzioni continue in $\mathbb{R}$, dimostrare che V_o, l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$x'''' + b(t)x''' + c(t)x'' + d(t)x' + f(t)x = 0,$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 4.

V_o è uno spazio vettoriale perch la combinazione lineare di due soluzioni è soluzione. Inoltre se consideriamo il problema di Cauchy associato, a un istante $t_o \in \mathbb{R}$ fissato e per un vettore dato V si ha $(x(t_o), x'(t_o), x''(t_o), x''(t_o)) = V$. Sia $M(t)$ la matrice che ha per colonne le soluzioni del problema di Cauchy che corrisponde ai vettori V^0, V^1, V^2, V^3. Il Wronskiano $W(t) = detM(t)$ verifica

$$W'(t) = -b(t)W(t)$$

pertanto se $W(t_o) \neq 0$ allora $W(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi se V^0, V^1, V^2, V^3 sono linearmente indipendenti determinano 4 soluzioni linearmente indipendenti e dimensione di $V_o \geq 4$. Viceversa una qualsiasi soluzione $X(t)$, calcolata in t_o insieme alle sue prime tre derivate determina un vettore U che è combinazione lineare di V^0, V^1, V^2, V^3. Usando il teorema di esistenza e unicità di Cauchy se ne deduce che la dimensione di $V_o \geq 4$.

b) Determinare una base di V_o nel caso $b = c = d = 0$ e $f = 1$. *L'equazione caratteristica è data da $\lambda^4 + 1 = 0$ che ha quattro soluzioni distinte $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi una base di V_o è data da*

$$x_0(t) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t),\ x_1(t) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t),$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t),\ x_3(t) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t).$$

Per dimostrare che sono linearmente indipendenti basta calcolare $W(0)$ di queste quattro soluzioni.

5. a) Dimostrare che le soluzioni dell'equazione $x'' = \sin x$ verificano

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \cos x = cte.$$

Moltiplicando l'equazione per x' si ottiene

$$0 = (\frac{1}{2}(x')^2)' - (\sin x)x' = (\frac{1}{2}(x')^2 + \cos x)',$$

che implica che l'uguaglianza richiesta.

b) Sia $x(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' = \sin x \\ x(0) = \frac{\pi}{3},\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

Verificare che $0 < x(t) < 2\pi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dal punto a) si ottiene che

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \cos x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

quindi, tenendo conto che $x'(0) > 0$,

$$x' = \sqrt{2(1 - \cos x)}.$$

Siccome questa equazione ammette come soluzioni stazionarie $x(t) = 2k\pi$ *per ogni* $k \in Z$, *la soluzione del problema di Cauchy è compresa tra* $x(t) = 0$ *e* $x(t) = 2\pi$.