Secondo esonero di Equazioni Differenziali a.a. 2011/12

Saranno valutati i tre migliori esercizi svolti.

1. Considerando f_1 e f_2 continue in $\mathbb{R}$,

   a) scrivere la formula di Duhamel per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -y + f_1(t) \\ y' = x + f_2(t) \\ (x(0), y(0)) = (x_o, y_o) \end{cases}$$

   (**Risposta**)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{Jt} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} + e^{Jt} \int_0^t e^{-Js} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix}$$

   b) Risolvere il sistema per $f_1(t) = t^2$ e $f_2(t) = t$.

   (**Risposta**) Siccome $e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ otteniamo $x(t) = (x_o + F_1(t)) \cos t - (y_o + F_2) \sin t$ mentre $y(t) = (x_o + F_1(t)) \sin t + (y_o + F_2) \cos t$ dove $F_1(t) = \int_0^t s^2 \cos s + s \sin s ds$ e $F_2(t) = \int_0^t -s^2 \sin s + s \cos s ds$. Integrali che si svolgono facilmente per parti.

   c) Determinare sotto quali condizioni per f_1 e f_2 esistono soluzioni periodiche del sistema.

   (**Risposta**) Le soluzioni sono periodiche, se lo sono F_1 e F_2 i.e.

$$\begin{array}{l} \int_0^{t+2\pi} f_1(s) \cos s + f_2(s) \sin s ds = \int_0^t f_1(s) \cos s + f_2(s) \sin s ds, \\ \int_0^{t+2\pi} -f_1(s) \sin s + f(s) \cos s ds = \int_0^t -f_1(s) \sin s + f(s) \cos s ds \end{array}$$

   i.e.

$$\int_0^{2\pi} f_1 \cos s + f_2 \sin s ds = 0, \quad \int_0^{2\pi} -f_1(s) \sin s + f(s) \cos s ds = 0.$$

   (Attenzione questo non è per forza verificato se f_1 e f_2 sono periodiche e.g. $\int_0^t \cos^2 s ds$ non è una funzione periodica)

2. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = x \cos y \\ y' = -\sin y - 3x^2. \end{cases} \tag{1}$$

   a) Determinare i punti critici di (1) e la loro natura. (**Risposta**) I punti critici sono $(0, k\pi)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ per ogni $k \in Z$.

   $DF(0, k\pi)$ è la matrice diagonale con termini sulla diagonale 1 e -1 qualsiasi k e dunque sono punti sella e dunque instabili.

Gli autovalori di $DF(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ sono puramente immaginari, pertanto il sistema linearizzato ammette orbite periodiche ma non si può dire nulla sul sistema proposto.

b) Dimostrare che (1) è un sistema Hamiltoniano, determinare l'Hamiltoniana e le orbite. (**Risposta**) Basta osservare che F è derivabile in $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso e che $\mathrm{div}F = 0$.

L'Hamiltoniana è data da $H(x,y) = x\sin y + x^3$ dunque le orbite sono gli insiemi di livello di H i.e. (x,y) tali che $x\sin y + x^3 = C$.

c) Determinare la soluzione di (1) che verifica $(x(0), y(0)) = (0, \frac{\pi}{2})$. (Si ricorda che $(\log(\cot\frac{s}{2}))' = \frac{-1}{\sin s}$.)

(**Risposta**) Siccome $H(0, \frac{\pi}{2}) = 0$, lungo la soluzione $x\sin y + x^3 = 0$ cioè $x = 0$ oppure $\sin y + \frac{x^2}{3} = 0$ siccome la seconda uguaglianza non è verificata dai dati iniziali se ne deduce che $x = 0$, così il sistema di equazione diventa $y' = -\sin y$. Che si può risolvere per separazione di variabili ottenendo $y = 2\mathrm{arcot}(e^t)$.

3. $v''(t) + (a + b\cos t)v(t) = 0$ è l'equazione di Mathieu.

   a) Scrivere il sistema di equazioni verificato da $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (v(t), v'(t))$:

$$x' = A(t)x$$

   b) Sia $X(t)$ la matrice soluzione del problema $X' = A(t)X$, $X(0) = I$. Se C è la matrice di monodromia $(X(t+2\pi) = X(t)C)$, dimostrare che $\mathrm{det}C = 1$.

   (**Risposta**) SI ha che $detC = detX(2\pi) = detX(0)e^{\int_0^{2\pi} traA(t)dt} = 1e^0 = 1$.

   c) Siano λ_1 e λ_2 gli autovalori di C, dimostrare che se $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $(0,0)$ è instabile.

   (**Risposta**) $\lambda_1\lambda_2 = 1$, gli autovalori sono entrambi reali e non coincidono pertanto $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| < 1$ o viceversa. Dal teorema di Floquet, tutte le soluzioni del sistema con coefficienti periodiche possono essere scritte, $x(t) = Z(t)e^B ty_o$ con Z periodica e $e^B = C$. Il punto $(0,0)$ è stabile se e solo se tuttli gli autovaoli di C sono in modulo minore di 1. Non essendo questo il caso il punto è instabile.

4. Sia F un campo vettoriale C^1 in $\mathbb{R}^2$. Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ tale che $\partial\Omega$ sia un orbita periodica di F. Sia Φ^t il flusso associato a F.

   a) Dimostrare che $\Phi^t(\Omega) = \Omega$.

   se $x \in \Omega$ allora per ogni t, $\Phi^t(x) \in \Omega$. Se, per assurdo, esiste t tale che $\Phi^t(x) \notin \Omega$ allora per il teorema di Jordan esiste un istante t' in cui $\Phi^{t'}(x) \in \partial\Omega$ che non é possibile per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy.

   b) Dimostrare che $\mathrm{div}F$ cambia segno in Ω.

$$\int_\Omega \div F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot N d\sigma = 0$$

   perch le orbite sono tangenti a F.

   c) Dimostrare che il sistema

$$\begin{cases} x' = x^3 + xy^2 \\ y' = y^3 + \cos x \end{cases}$$

   non ha soluzioni periodiche.

   Infatti $\mathrm{div}F = 3x^2 + y^2 + 3y^4 > 0$ per $(x,y) \neq (0,0)$.