17 luglio 2012, Equazioni Differenziali a.a. 2011/12

1. Per $x_o = 1$, determinare la soluzione **massimale** del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 e^{3t} \\ x(0) = x_o. \end{cases}$$

b)Al variare di $x_o \in \mathbb{R}$ determinare l'intervallo di esistenza della soluzione massimale.

2. Sia il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \cos(|x - x_o|^a + \frac{\pi}{4}) + \cosh(t^2 + x^2) \\ x(t_o) = x_o. \end{cases} \tag{1}$$

Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste la soluzione di (1) e per quali è unica.

3. Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 7x + y, \\ y' = -4x + 3y, \end{cases}$$

4. Considerare il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = \cos x + \frac{1}{y+1} \\ y' = y \sin x \end{cases} \tag{2}$$

a) Determinare i punti critici del sistema e la loro natura.

b)Verificare che il sistema è Hamiltoniano in un aperto di $\mathbb{R}^2$, determinare la funzione Hamiltoniana e le orbite.

5. Sia g una funzione derivabile in $\mathbb{R}$. In $x > 0$, consideriamo l'equazione, $x^2 u'' + xu' + g(u) = 0$.

a) Determinare l'equazione verificata da $v(t) = u(e^t)$ in $\mathbb{R}$.

b) Determinare una funzione G tale che v verifica $\frac{(v')^2}{2} = G(v) + c$ per qualche costante c.